FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 6

Pentru primele două exerciţii, fixăm $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I care conţine:

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

(S6.1) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

(i) $\forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y, z) = d)$;

(ii) $\forall y(\forall x P(x, y) \to \exists z Q(x, z))$;

(iii) $\exists x \forall y P(x, y) \lor \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z))$;

(iv) $\exists z(\exists x Q(x, z) \lor \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \land \forall x \exists z Q(z, x))$.

(S6.2) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x \exists z(f(x) = c \land \neg(g(x, z) = d))$;

(ii) $\forall y \exists z \exists u(P(u, y) \to Q(y, z))$;

(iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z(P(x, u) \lor \neg(S(y) \to R(z)))$;

(iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x, z) \lor R(x)) \to (R(u) \lor \neg Q(v, u)))$.

(S6.3) Demonstraţi că orice clasă finit axiomatizabilă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizată de un singur enunţ.

(S6.4) Demonstraţi că dacă o clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este finit axiomatizabilă, atunci complementul să $\mathcal{K}^c$ este de asemenea finit axiomatizabilă.

(S6.5) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Q}, <) \vDash \varphi$, dar $(\mathbb{Z}, <) \nvDash \varphi$.

(S6.6) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi şi Γ o mulţime de enunţuri ale lui $\mathcal{L}$. Demonstraţi următoarele:

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) $Th(\Gamma)$ este o $\mathcal{L}$-teorie.

(iii) Fie T o $\mathcal{L}$-teorie a.î. $\Gamma \subseteq T$. Atunci $Th(\Gamma) \subseteq T$.