

Seminar 7

(S7.1) Fie φ un enunț al lui \mathcal{L} cu proprietatea că pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există o \mathcal{L} -structură finită \mathcal{A} de cardinal $\geq m$ a.î. $\mathcal{A} \models \neg\varphi$. Demonstrați că $\neg\varphi$ are un model infinit.

Proof. Aplicăm Propoziția 4.86 pentru $\Gamma = \{\neg\varphi\}$. □

(S7.2) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi și Γ o mulțime de enunțuri ale lui \mathcal{L} cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Notăm cu \mathcal{M} clasa modelelor finite ale lui Γ . Demonstrați că \mathcal{M} nu este axiomatizabilă.

Proof. Presupunem prin reducere la absurd că \mathcal{M} este axiomatizabilă. Așadar, există $\Delta \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ a.î.

(**) pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , $\mathcal{A} \models \Delta \iff \mathcal{A} \in \mathcal{M}$.

Fie

$$\Sigma := \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Σ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate.

Fie Σ_0 o submulțime finită a lui Σ . Atunci

$$\Sigma_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit \mathcal{A} a.î. $|\mathcal{A}| \geq m$. Deoarece $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, avem conform (**), că $\mathcal{A} \models \Delta$. De asemenea, $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$. Prin urmare, $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \models \Sigma_0$. Așadar, Σ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Σ are un model \mathcal{B} .

Deoarece $\mathcal{B} \models \Delta$, avem, conform (**), că $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$. În particular, \mathcal{B} este finită.

Deoarece $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că \mathcal{B} este infinită.

Am obținut o contradicție. □

(S7.3) Fie \mathcal{K} o clasă de \mathcal{L} -structuri și \mathcal{K}^c complementul său în clasa tuturor \mathcal{L} -structurilor. Dacă atât \mathcal{K} cât și \mathcal{K}^c sunt axiomatizabile, atunci amândouă sunt finit axiomatizabile.

Proof. Fie $\Gamma, \Delta \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ a.î. $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$ și $\mathcal{K}^c = \text{Mod}(\Delta)$. Presupunem prin reducere la absurd că \mathcal{K} nu este finit axiomatizabilă. Demonstrăm folosind Teorema de compacitate că $\Gamma \cup \Delta$ este satisfiabilă. Fie $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \Delta$ finită. Atunci $\Sigma \subseteq \Gamma_0 \cup \Delta$, unde $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ este finită. Deoarece $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\Gamma_0)$ și $\mathcal{K} \neq \text{Mod}(\Gamma_0)$, există \mathcal{A} a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma_0$ și $\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c$. Prin urmare, cum $\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c$, $\mathcal{A} \models \Delta$, deci $\mathcal{A} \models \Gamma_0 \cup \Delta$ și în particular $\mathcal{A} \models \Sigma$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că $\Gamma \cup \Delta$ are un model \mathcal{B} . Ar rezulta atunci că $\mathcal{B} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c = \emptyset$, contradicție.

Demonstrăm analog că \mathcal{K}^c este finit axiomatizabilă. □

(S7.4) Decideți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

- (i) $(\mathbb{N}, \leq, +, 0) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, \cdot, 1)$;
- (ii) $(\mathbb{N}, \leq, \cdot, 1) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, +, 0)$;
- (iii) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq, \cdot, 1) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, +, 0)$;
- (iv) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, +)$.

Proof. (i) Este adevărată. O scufundare este $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(n) = 2^n$. Se observă că h este strict crescătoare, $h(0) = 1$ și $h(n+m) = 2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m = h(n) \cdot h(m)$.

(ii) Este falsă. Dacă $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este un homomorfism, atunci $h(1) = 0$ și h este crescătoare. Rezultă că $h(0) \leq h(1) = 0$, deci $h(0) = 0$. Prin urmare, h nu este injectiv.

(iii) Este falsă. Presupunem că h este o scufundare. Atunci $h(1) = 0$, $h(2) > h(1) = 0$, deci $h(2) \geq 1$. Prin inducție se demonstrează imediat că $h(n+1) \geq n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Obținem că pentru orice $n \geq 1$, $2^n - 1 \leq h(2^n) = nh(2)$, deci că $h(2) \geq \frac{2^n - 1}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este o contradicție, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{n} = \infty$.

(iv) Este falsă. Presupunem că h este o scufundare. Fie $m := h(2)$ și $n := h(3)$. Atunci $m \neq n$,

$$\begin{aligned} h(2^n \cdot 3^m) &= h(2^n) + h(3^m) = nh(2) + mh(3) = nm + mn = 2mn \text{ și} \\ h(3^{2m}) &= 2mh(3) = 2mn. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, $2^n 3^m \neq 3^{2m}$. Deci, h nu e injectiv. □

(S7.5) Fie \mathcal{A}, \mathcal{B} două \mathcal{L} -structuri. Demonstrați că dacă $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ este izomorfism, atunci $h^{-1} : \mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$ este de asemenea izomorfism.

Proof. Fie $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$. Evident, $h^{-1} : B \rightarrow A$ este bijecție. Demonstrăm în continuare că h^{-1} este homorfism.

- Fie $m \geq 1$, $R \in \mathcal{R}_m$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $b_1, \dots, b_m \in B$, $a_i = h^{-1}(b_i) \in A$, $i = 1, \dots, m$.
Atunci

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m) &\iff R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m)) \\ &\iff R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) \quad \text{deoarece } h \text{ este izomorfism} \\ &\iff R^{\mathcal{A}}(h^{-1}(b_1), \dots, h^{-1}(b_m)). \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m)) &= h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m))) \\ &= h^{-1}(h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m))) \quad \text{deoarece } h \text{ este izomorfism} \\ &= f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(b_1), \dots, h^{-1}(b_m)). \end{aligned}$$

- Fie c simbol de constantă. Atunci $h^{-1}(c^{\mathcal{B}}) = h^{-1}(h(c^{\mathcal{A}})) = c^{\mathcal{A}}$.

Așadar, h^{-1} este homomorfism. rezultă concluzia. □