

## Seminar 7

(S7.1) Fie  $\varphi$  un enunț al lui  $\mathcal{L}$  cu proprietatea că pentru orice  $m \in \mathbb{N}$  există o  $\mathcal{L}$ -structură finită  $\mathcal{A}$  de cardinal  $\geq m$  a.î.  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ . Demonstrați că  $\neg\varphi$  are un model infinit.

(S7.2) Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi și  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri ale lui  $\mathcal{L}$  cu proprietatea că

(\*) pentru orice  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  are un model finit de cardinal  $\geq m$ .

Notăm cu  $\mathcal{M}$  clasa modelelor finite ale lui  $\Gamma$ . Demonstrați că  $\mathcal{M}$  nu este axiomatizabilă.

(S7.3) Fie  $\mathcal{K}$  o clasă de  $\mathcal{L}$ -structuri și  $\mathcal{K}^c$  complementul său în clasa tuturor  $\mathcal{L}$ -structurilor. Dacă atât  $\mathcal{K}$  cât și  $\mathcal{K}^c$  sunt axiomatizabile, atunci amândouă sunt finit axiomatizabile.

(S7.4) Decideți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

- (i)  $(\mathbb{N}, \leq, +, 0) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, \cdot, 1)$ ;
- (ii)  $(\mathbb{N}, \leq, \cdot, 1) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, +, 0)$ ;
- (iii)  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq, \cdot, 1) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, \leq, +, 0)$ ;
- (iv)  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot) \hookrightarrow_0 (\mathbb{N}, +)$ .

(S7.5) Fie  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  două  $\mathcal{L}$ -structuri. Demonstrați că dacă  $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  este izomorfism, atunci  $h^{-1} : \mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$  este de asemenea izomorfism.