

Examen

1 Teoria mulțimilor

(P1) [1 punct] Să se arate că mulțimea $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nu este numărabilă.

Demonstrație: Presupunem că $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ este numărabilă. Deoarece $\mathbb{Q}$ este numărabilă, rezultă că $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ este numărabilă, contradicție.

(P2) [1,5 puncte]

- (i) Fie α un cardinal infinit, β, γ cardinale astfel încât $\beta \leq \alpha$, γ este nenul și $\gamma \leq \alpha$. Să se arate că $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha$.
- (ii) Fie α un cardinal finit și β un cardinal infinit. Să se arate că $\alpha < \beta$.

Demonstrație:

- (i) Avem că

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \gamma &= \alpha \cdot \gamma \quad \text{aplicăm Propoziția 2.22 pentru a obține că } \alpha + \beta = \alpha \\ &= \alpha \quad \text{aplicăm Propoziția 2.29}\end{aligned}$$

- (ii) Avem că $\alpha < \aleph_0 \leq \beta$, conform Propoziției 2.8.(ii) și Propoziției 2.14.

(P3) [1,5 puncte] Demonstrați că

$$|(1, 3) \cup [2, 4]| = |[1, 2) \cup \{3, 4\}| = |[1, 2] \cup \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}| = \mathfrak{c}.$$

Demonstrație: Avem

$$\begin{aligned}|(1, 3) \cup [2, 4]| &= |(1, 4]| = \mathfrak{c} \\ |[1, 2) \cup \{3, 4\}| &= |[1, 2)| + |\{3, 4\}| = \mathfrak{c} + \mathbf{2} = \mathfrak{c} \\ |[1, 2] \cup \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}| &= |[1, 2]| + |\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}| = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}\end{aligned}$$

2 Logica propozițională

(P4) [1 punct] Reamintim că $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mulțimea variabilelor din logica propozițională. Fie $W := \{v_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Să se demonstreze că W este numărabilă.

Demonstrație: Fie $2\mathbb{N}$ mulțimea numerelor pare. Deoarece $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ este o bijecție, rezultă că $2\mathbb{N}$ este numărabilă. Fie

$$g : 2\mathbb{N} \rightarrow W, g(2n) = v_{2n}.$$

Cum g este bijecție, obținem că W este de asemenea numărabilă.

(P5) [1 punct] Arătați că pentru orice formule φ, ψ, χ , avem:

$$\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi).$$

Demonstrație: Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) = e^+((\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi)),$$

deci că

$$e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) = (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)) \vee (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(i) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) &= 1 \rightarrow (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) = e^+(\psi) \vee e^+(\chi) \\ (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)) \vee (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) &= (1 \rightarrow e^+(\psi)) \vee (1 \rightarrow e^+(\chi)) \\ &= e^+(\psi) \vee e^+(\chi). \end{aligned}$$

(ii) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) &= 0 \rightarrow (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) = 1 \\ (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)) \vee (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) &= (0 \rightarrow e^+(\psi)) \vee (0 \rightarrow e^+(\chi)) = 1 \vee 1 = 1. \end{aligned}$$

3 Logica de ordinul întâi

(P6) [1,5 puncte] Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I și orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(i) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x .

(ii) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x\psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

(i) Obținem

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] &\Leftrightarrow \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \\
&\Leftrightarrow \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]) \\
&\Rightarrow \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \text{ și} \\
&\quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] \text{ și } \mathcal{A} \models (\exists x\psi)[e] \\
&\Rightarrow \mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models (\exists x\psi)[e] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)[e].
\end{aligned}$$

(ii) Obținem

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] &\Leftrightarrow \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \\
&\Leftrightarrow \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]) \\
&\Leftrightarrow \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]) \\
&\quad \text{conform Propoziției 4.21} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \exists x\psi[e] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \exists x\psi)[e].
\end{aligned}$$

(P7) [1,5 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I care conține:

- două simboluri de relații unare S, T și un simbol de relație binară R ;
- un simbol de operație unară f ;
- un simbol de constantă c .

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi &:= \neg \exists x R(x, c) \wedge \forall y \neg S(y), \\
\psi &:= \exists x (S(x) \rightarrow \forall y (f(y) = c)) \rightarrow \neg (\forall x T(x) \vee \forall y S(y)).
\end{aligned}$$

Demonstrație: Avem că

$$\begin{aligned}
\varphi &\models \forall x \neg R(x, c) \wedge \forall y \neg S(y) \\
&\models \forall x (\neg R(x, c) \wedge \forall y \neg S(y)) \\
&\models \forall x \forall y (\neg R(x, c) \wedge \neg S(y)) \\
\psi &\models \exists x \forall y (S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow \neg(\forall x T(x) \vee \forall y S(y)) \\
&\models \exists x \forall y (S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow (\neg \forall x T(x) \wedge \neg \forall y S(y)) \\
&\models \exists x \forall y (S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow (\exists x \neg T(x) \wedge \exists y \neg S(y)) \\
&\models \exists x \forall y (S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow \exists x (\neg T(x) \wedge \exists y \neg S(y)) \\
&\models \exists x \forall y (S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow \exists x \exists y (\neg T(x) \wedge \neg S(y)) \\
&\models \forall x (\forall y (S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow \exists x \exists y (\neg T(x) \wedge \neg S(y))) \\
&\models \forall x \exists y ((S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow \exists x \exists y (\neg T(x) \wedge \neg S(y))) \\
&\models \forall x \exists y ((S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow \exists u \exists v (\neg T(u) \wedge \neg S(v))) \\
&\models \forall x \exists y \exists u ((S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow \exists v (\neg T(u) \wedge \neg S(v))) \\
&\models \forall x \exists y \exists u \exists v ((S(x) \rightarrow (f(y) = c)) \rightarrow (\neg T(u) \wedge \neg S(v))).
\end{aligned}$$

(P8) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\mathcal{K}$ o clasă de $\mathcal{L}$ -structuri finit axiomatizabilă și Γ o mulțime de enunțuri. Demonstrați că dacă Γ axiomatizează $\mathcal{K}$, atunci $\mathcal{K}$ este axiomatizată de o submulțime finită a lui Γ .

Demonstrație: Presupunem că $Mod(\Gamma) = \mathcal{K}$. Deoarece $\mathcal{K}$ este finit axiomatizabilă, există o mulțime finită de enunțuri $\Delta = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ astfel încât $Mod(\Delta) = \mathcal{K}$.

Luăm $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Atunci $Mod(\varphi) = Mod(\Delta) = \mathcal{K}$. Deoarece $Mod(\varphi) = \mathcal{K} = Mod(\Gamma)$, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă. Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ are o submulțime finită nesatisfiabilă. Așadar, există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă. Demonstrăm acum că $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$.

" $\subseteq$ " $\mathcal{K} = Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Sigma)$.

" $\supseteq$ " Fie $\mathcal{A} \in Mod(\Sigma)$. Deoarece $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă, rezultă că $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$, deci că $\mathcal{A} \models \varphi$. Așadar, $\mathcal{A} \in Mod(\varphi) = \mathcal{K}$.