

Examen

1 Teoria mulțimilor

(P1) [1 punct] Să se arate că mulțimea $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nu este numărabilă.

(P2) [1,5 puncte]

(i) Fie α un cardinal infinit, β, γ cardinale astfel încât $\beta \leq \alpha$, γ este nenul și $\gamma \leq \alpha$. Să se arate că $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha$.

(ii) Fie α un cardinal finit și β un cardinal infinit. Să se arate că $\alpha < \beta$.

(P3) [1,5 puncte] Demonstrați că

$$|(1, 3) \cup [2, 4]| = |[1, 2) \cup \{3, 4\}| = |[1, 2] \cup \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}| = \mathfrak{c}.$$

2 Logica propozițională

(P4) [1 punct] Reamintim că $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mulțimea variabilelor din logica propozițională. Fie $W := \{v_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Să se demonstreze că W este numărabilă.

(P5) [1 punct] Arătați că pentru orice formule φ, ψ, χ , avem:

$$\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi).$$

3 Logica de ordinul întâi

(P6) [1,5 puncte] Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I și orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(i) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x .

(ii) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x\psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(P7) [1,5 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I care conține:

- două simboluri de relații unare S, T și un simbol de relație binară R ;
- un simbol de operație unară f ;
- un simbol de constantă c .

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \neg \exists x R(x, c) \wedge \forall y \neg S(y),$$

$$\psi := \exists x (S(x) \rightarrow \forall y (f(y) = c)) \rightarrow \neg (\forall x T(x) \vee \forall y S(y)).$$

(P8) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\mathcal{K}$ o clasă de $\mathcal{L}$ -structuri finit axiomatizabilă și Γ o mulțime de enunțuri. Demonstrați că dacă Γ axiomatizează $\mathcal{K}$, atunci $\mathcal{K}$ este axiomatizată de o submulțime finită a lui Γ .