

LOGICA DE ORDINUL I

1

Limbaje de ordinul I

Definiția 1.1

Un limbaj \mathcal{L} de ordinul I este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
 - ▶ conectorii \neg și \rightarrow ;
 - ▶ paranteze: $(,)$;
 - ▶ simbolul de egalitate $=$;
 - ▶ cuantificatorul universal \forall ;
 - ▶ o mulțime \mathcal{R} de simboluri de relații;
 - ▶ o mulțime \mathcal{F} de simboluri de funcții;
 - ▶ o mulțime \mathcal{C} de simboluri de constante;
 - ▶ o funcție aritate $\text{ari} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.
- ▶ \mathcal{L} este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$.
- ▶ τ se numește **signatura** lui \mathcal{L} sau **vocabularul** lui \mathcal{L} sau **alfabetul** lui \mathcal{L} sau **tipul de similaritate** al lui \mathcal{L} .

2

Limbaje de ordinul I

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $\text{Sim}_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui \mathcal{L} este

$$\text{Sim}_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc **simboluri non-logice**.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc **simboluri logice**.

- Notăm variabilele cu x, y, z, v, \dots , simbolurile de relații cu P, Q, R, \dots , simbolurile de funcții cu f, g, h, \dots și simbolurile de constante cu c, d, e, \dots

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m :=$ mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m ;

$\mathcal{R}_m :=$ mulțimea simbolurilor de relații de aritate m .

3

Limbaje de ordinul I

Definiția 1.2

Mulțimea $\text{Expr}_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui \mathcal{L} este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui \mathcal{L} .

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ .

Definiția 1.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui \mathcal{L} , unde $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$ pentru orice i .

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește **(i, j) -subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ ;
- ▶ Notăm cu $\text{Var}(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ .

4

Definiția 1.4

Mulțimea $Trm_{\mathcal{L}}$ a termenilor lui \mathcal{L} este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice variabilă este element al lui Γ ;
- ▶ orice simbol de constantă este element al lui Γ ;
- ▶ dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.

Notății:

- ▶ Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \dots$
- ▶ $Var(t)$ este mulțimea variabilelor care apar în termenul t .
- ▶ Scriem $t(x_1, \dots, x_n)$ dacă x_1, \dots, x_n sunt variabile și $Var(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Definiția 1.5

Un termen t se numește **închis** dacă $Var(t) = \emptyset$.

5

Propoziția 1.6 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține variabilele și simbolurile de constante;
- ▶ dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate \mathcal{P} : definim Γ ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac \mathcal{P} și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

6

Definiția 1.7

Formulele atomice ale lui \mathcal{L} sunt expresiile de forma:

- ▶ $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $(Rt_1 \dots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și t_1, \dots, t_m sunt termeni.

Definiția 1.8

Mulțimea $Form_{\mathcal{L}}$ a formulelor lui \mathcal{L} este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice formulă atomică este element al lui Γ ;
- ▶ Γ este închisă la \neg : dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \rightarrow : dacă $\varphi, \psi \in \Gamma$, atunci $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\forall x$ (pentru orice variabilă x): dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\forall x\varphi) \in \Gamma$ pentru orice variabilă x .

7

Notății

- ▶ Formule: $\varphi, \psi, \chi, \dots$
- ▶ $Var(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula φ .

Convenție

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \dots t_m$ în loc de $(Rt_1 \dots t_m)$, $\forall x\varphi$ în loc de $(\forall x\varphi)$, etc..

8

Propoziția 1.9 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține toate formulele atomice;
- ▶ Γ este închisă la \neg, \rightarrow și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate \mathcal{P} : definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac \mathcal{P} și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = \text{Form}_{\mathcal{L}}$.

Conectori derivați

Conectorii $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ și **cuantificatorul existențial** \exists sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\ \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\ \exists x\varphi &:= (\neg\forall x(\neg\varphi)). \end{aligned}$$

Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - ▶ \neg are precedență mai mare decât ceilalți conectori;
 - ▶ \wedge, \vee au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.
- ▶ Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.
- ▶ Cuantificatorii \forall, \exists au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- ▶ Așadar, $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ este $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$ și nu $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.

De multe ori identificăm un limbaj \mathcal{L} cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- ▶ Scriem de multe ori $f(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $ft_1 \dots t_m$ și $R(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \dots t_m$.
- ▶ Pentru simboluri f de operații binare scriem t_1ft_2 în loc de ft_1t_2 .
- ▶ Analog pentru simboluri R de relații binare: scriem t_1Rt_2 în loc de Rt_1t_2 .

Definiția 1.10

O \mathcal{L} -**structură** este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- ▶ A este o mulțime nevidă;
- ▶ $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea m , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$;
- ▶ $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea m , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- ▶ $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.
- ▶ A se numește **universul** structurii \mathcal{A} . **Notăție:** $A = |\mathcal{A}|$
- ▶ $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui f (respectiv R , c) în \mathcal{A} .

13

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- ▶ $\mathcal{L}_=$ -structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

14

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{<\}; <$ este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- ▶ $\mathcal{F} = \{+, \dot{x}, \dot{S}\}$; $+$, \dot{x} sunt simboluri de operații binare și \dot{S} este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (<; +, \dot{x}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (<, +, \dot{x}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de \mathcal{L}_{ar} -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$<^{\mathcal{N}} = <, +^{\mathcal{N}} = +, \dot{x}^{\mathcal{N}} = \cdot, \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de \mathcal{L}_{ar} -structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

15

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- ▶ $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ \mathcal{L} -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate (A, \leq) , folosim simbolul \leq în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{\leq} .
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $<$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul \dot{E} în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{Graf} .
- ▶ Dacă suntem interesați de structuri (A, \in) , folosim simbolul \in în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{\in} .

16

SEMANTICA

Interpretare (evaluare)

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I și \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură.

Definiția 1.11

O **interpretare** sau **evaluare** a (variabilelor) lui \mathcal{L} în \mathcal{A} este o funcție $e : V \rightarrow A$.

În continuare, $e : V \rightarrow A$ este o interpretare a lui \mathcal{L} în \mathcal{A} .

Definiția 1.12 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește **interpretarea** $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e :

- ▶ dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- ▶ dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- ▶ dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.

Interpretarea formulelor

Prin inducție pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei φ sub evaluarea e .

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$
$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

Negația și implicația

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$$\rightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Prin urmare,

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1)$.

Notăție

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretare $e_{x \leftarrow a} : V \rightarrow A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui \mathcal{L} în \mathcal{A} .

Definiția 1.13

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ e **satisface** φ în \mathcal{A} dacă $\varphi^A(e) = 1$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.
- ▶ e **nu satisface** φ în \mathcal{A} dacă $\varphi^A(e) = 0$. **Notăție:** $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.

Corolar 1.14

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models \neg \varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models \psi[e]$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

$\vee, \wedge, \leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$,

| p | q | $p \vee q$ | p | q | $p \wedge q$ | p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|------------|-----|-----|--------------|-----|-----|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 1.15

- (i) $(\varphi \vee \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \vee \psi^A(e)$;
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \wedge \psi^A(e)$;
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \leftrightarrow \psi^A(e)$;
- (iv) $(\exists x \varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} (\exists x \varphi)^A(e) = 1 &\iff (\neg \forall x \neg \varphi)^A(e) = 1 \iff (\forall x \neg \varphi)^A(e) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg \varphi)^A(e_{x \leftarrow a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1. \end{aligned}$$

Corolar 1.16

- (i) $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iv) $\mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Fie φ formulă a lui \mathcal{L} .

Definiția 1.17

Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și o evaluare $e : V \rightarrow A$ a.î.

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că (\mathcal{A}, e) este un **model** al lui φ .

Atenție! Este posibil ca atât φ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.

Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Fie φ formulă a lui \mathcal{L} .

Definiția 1.18

Spunem că φ este **adevărată** într-o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} dacă pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că \mathcal{A} **satisfacă** φ sau că \mathcal{A} este un **model** al lui φ .

Notăție: $\mathcal{A} \models \varphi$

Definiția 1.19

Spunem că φ este formulă **universal adevărată** sau (**logic**) **validă** dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\models \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui \mathcal{L} .

Definiția 1.20

φ și ψ sunt **logic echivalente** dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \equiv \psi$

Definiția 1.21

ψ este **consecință semantică** a lui φ dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \implies \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Observație

(i) $\varphi \models \psi$ ddacă $\models \varphi \rightarrow \psi$.

(ii) $\varphi \equiv \psi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y ,

$$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi \quad (1)$$

$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi \quad (2)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \quad (3)$$

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi) \quad (4)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \quad (5)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi \quad (6)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (7)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (8)$$

$$\forall x\varphi \equiv \exists x\varphi \quad (9)$$

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (10)$$

$$\forall x\varphi \models \varphi \quad (11)$$

$$\forall x\forall y\varphi \models \forall y\forall x\varphi \quad (12)$$

$$\exists x\exists y\varphi \models \exists y\exists x\varphi \quad (13)$$

$$\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi. \quad (14)$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.22

Pentru orice termeni s, t, u ,

$$(i) \models t = t;$$

$$(ii) \models s = t \rightarrow t = s;$$

$$(iii) \models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

29

Propoziția 1.23

Pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $t_i, u_i, i = 1, \dots, m$,

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m \quad (15)$$

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow (Rt_1 \dots t_m \leftrightarrow Ru_1 \dots u_m) \quad (16)$$

Dem.: Arătăm (15). Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare a.î. $\mathcal{A} \models ((t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m))[e]$. Atunci $\mathcal{A} \models (t_i = u_i)[e]$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$, deci $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$. Rezultă că

$$\begin{aligned} (ft_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \dots u_m)^{\mathcal{A}}(e) \end{aligned}$$

Așadar, $\mathcal{A} \models (ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m)[e]$. □

30

Definiția 1.24

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui \mathcal{L} și x o variabilă.

- ▶ spunem că variabila x **apare legată pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. (i, j) -subexpresia lui φ este o subexpresie a lui φ de forma $\forall x\psi$;
- ▶ spunem că x **apare liberă pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ ;
- ▶ x este **variabilă legată** (bounded variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ ;
- ▶ x este **variabilă liberă** (free variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ .

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z . Variabile legate: x .

31

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ .

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{aligned} FV(\varphi) &= \text{Var}(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\ FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi); \\ FV(\varphi \rightarrow \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi); \\ FV(\forall x\varphi) &= FV(\varphi) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

Notație: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

32

Propoziția 1.25

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$, pentru orice termen t ,
dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(t)$, atunci
 $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.26

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$, pentru orice formulă φ ,
dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{FV}(\varphi)$, atunci
 $\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$.

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen. Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $\text{Var}(t_1) \subseteq \text{FV}(\varphi)$, $\text{Var}(t_2) \subseteq \text{FV}(\varphi)$, deci putem aplica Propoziția 1.25 pentru a concludă că
 $t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2)$, $t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = R t_1 \dots t_m$.

Atunci $\text{Var}(t_i) \subseteq \text{FV}(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \dots, m$, deci putem aplica Propoziția 1.25 pentru a concludă că
 $t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2)$ pentru orice $i = 1, \dots, m$.

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) \\ &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg \psi$.

Deoarece $\text{FV}(\psi) = \text{FV}(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a concludă că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2].$$

Rezultă

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Deoarece $\text{FV}(\psi), \text{FV}(\chi) \subseteq \text{FV}(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a concludă că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \chi[e_2].$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

Interpretarea formulelor

- $\varphi = \forall x\psi$ și

$e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$.

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$e_{1x \leftarrow a}(v) = e_{2x \leftarrow a}(v)$ pentru orice $v \in FV(\psi)$.

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1x \leftarrow a}, e_{2x \leftarrow a}$ pentru a concluda că

pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[e_{1x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_{2x \leftarrow a}]$.

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1x \leftarrow a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{2x \leftarrow a}] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

□

37

Echivalențe și consecințe logice

Propoziția 1.27

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (17)$$

$$\varphi \models \forall x\varphi \quad (18)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi \quad (19)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \forall x\psi \quad (20)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x\psi \quad (21)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi \quad (22)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (23)$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (24)$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \models \exists x\psi \rightarrow \varphi \quad (25)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (26)$$

Dem.: Exercițiu.

38

Enunțuri

Definiția 1.28

O formulă φ se numește **enunț** (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notație: $Sent_{\mathcal{L}} :=$ mulțimea enunțurilor lui \mathcal{L} .

Propoziția 1.29

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 1.26 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Definiția 1.30

O \mathcal{L} -structură \mathcal{A} este un **model** al lui φ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \rightarrow A$. **Notație:** $\mathcal{A} \models \varphi$

39

Mulțimi de formule

Fie φ formulă lui \mathcal{L} și Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.31

Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și o evaluare $e : V \rightarrow A$ a.î.

$$\mathcal{A} \models \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că (\mathcal{A}, e) este un **model** al lui Γ .

Definiția 1.32

Spunem că φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$(\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \Gamma \implies (\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \varphi.$$

Notație: $\Gamma \models \varphi$

40

Mulțimi de enunțuri

Fie φ enunț al lui \mathcal{L} și Γ o mulțime de enunțuri.

Definiția 1.33

Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} a.î.

$$\mathcal{A} \models \gamma \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că \mathcal{A} este un **model** al lui Γ . **Notăție:** $\mathcal{A} \models \Gamma$

Definiția 1.34

Spunem că φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models \Gamma \implies \mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\Gamma \models \varphi$

41

Tautologii

Noțiunile de **tautologie** și **consecință tautologică** din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectivelor \neg, \rightarrow .

Propoziția 1.35

O **\mathcal{L} -evaluare (de adevăr)** este o funcție $F : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ ,

- ▶ $F(\neg\varphi) = 1 - F(\varphi)$;
- ▶ $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 1.36

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e, \mathcal{A}} : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o \mathcal{L} -evaluare.

Dem.: Exercițiu ușor.

42

Tautologii

Definiția 1.37

Fie φ o formulă și Γ o mulțime de formule.

- ▶ φ este **tautologie** dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice \mathcal{L} -evaluare F .
- ▶ φ este **consecință tautologică** a lui Γ dacă pentru orice \mathcal{L} -evaluare de adevăr F ,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \implies F(\varphi) = 1.$$

Exemple de tautologii: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$, etc..

43

Tautologii

Propoziția 1.38

Fie φ o formulă și Γ o mulțime de formule.

- (i) Dacă φ este tautologie, atunci φ este validă.
- (ii) Dacă φ este consecință tautologică a lui Γ , atunci $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen

- (i) Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e, \mathcal{A}}$ este \mathcal{L} -evaluare, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.
- (ii) Fie (\mathcal{A}, e) un model al lui Γ . Atunci $\gamma^{\mathcal{A}}(e) = 1$, deci $V_{e, \mathcal{A}}(\gamma) = 1$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Deoarece φ este consecință tautologică a lui Γ , rezultă că $V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = 1$, deci $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. □

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu e tautologie.

44

Substituția

Fie x o variabilă a lui \mathcal{L} și u termen al lui \mathcal{L} .

Definiția 1.39

Pentru orice termen t al lui \mathcal{L} , definim

$t_x(u) :=$ expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u .

Propoziția 1.40

Pentru orice termen t al lui \mathcal{L} , $t_x(u)$ este termen al lui \mathcal{L} .

Dem.: Demonstrăm prin inducție după termenul t .

▶ $t = y \in V$. Atunci $y_x(u) = \begin{cases} y & \text{dacă } y \neq x \\ u & \text{dacă } y = x. \end{cases}$

▶ $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $c_x(u) = c$.

▶ $t = ft_1 \dots t_m$ și, conform ipotezei de inducție, $(t_1)_x(u), \dots, (t_m)_x(u)$ sunt termeni. Atunci $(ft_1 \dots t_m)_x(u) = f(t_1)_x(u) \dots (t_m)_x(u)$ este termen. \square

45

Substituția

- ▶ Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui x cu u .
- ▶ De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x \varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x \varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$.

Avem

- ▶ Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} cu $|A| \geq 2$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \forall x \varphi$.
- ▶ $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

46

Substituția

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 1.41

Spunem că x este **liberă pentru u** în φ sau că u este **substituibil pentru x** în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u , nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y \psi$ nu conține apariții libere ale lui x .

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- ▶ u nu conține variabile;
- ▶ φ nu conține variabile care apar în u ;
- ▶ nici o variabilă din u nu apare legată în φ ;
- ▶ x nu apare în φ ;
- ▶ φ nu conține apariții libere ale lui x .

47

Substituția

Definiție alternativă

Noțiunea " x este liberă pentru u în φ " poate fi definită și prin inducție după formula φ astfel:

- ▶ dacă φ este formulă atomică, atunci x este liberă pentru u în φ ;
- ▶ dacă $\varphi = \neg \psi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă x este liberă pentru u în ψ ;
- ▶ dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă x este liberă pentru u atât în ψ cât și în χ ;
- ▶ dacă $\varphi = \forall y \psi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă
 - ▶ x nu apare liberă în ψ , sau
 - ▶ y nu apare în u și x este liberă pentru u în ψ .

48

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ .

Definiția 1.42

$\varphi_x(u) :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui x cu u .

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o **substituție liberă**.

Propoziția 1.43

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui \mathcal{L} .

Dem.: Exercițiu.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$.

Lema 1.44

Fie x o variabilă, u un termen și $a = u^{\mathcal{A}}(e)$.

(i) Pentru orice termen t , $(t_x(u))^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a})$.

(ii) Pentru orice formulă φ , dacă x este liberă pentru u în φ , atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi_x(u)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$$

Ideea lemei este următoarea: a schimba evaluarea e pentru a atribui variabilei x valoarea $a \in A$ este același lucru cu a înlocui x cu un termen u a cărui interpretare sub e este a .

Propoziția 1.45

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x ,

(i) pentru orice termen t ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$. Presupunem că $\mathcal{A} \models (u_1 = u_2)[e]$, adică $u_1^{\mathcal{A}}(e) = u_2^{\mathcal{A}}(e) := a \in A$.

(i) Conform Lemei 1.44.(i),

$$(t_x(u_1))^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = (t_x(u_2))^{\mathcal{A}}(e),$$

deci $\mathcal{A} \models (t_x(u_1) = t_x(u_2))[e]$.

(ii) Aplicând Lema 1.44.(ii), obținem

$$\mathcal{A} \models \varphi_x(u_1)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi_x(u_2)[e].$$

Deci, $\mathcal{A} \models (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2))[e]$. \square

Propoziția 1.46

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ ,

$$\models \forall x \varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x \varphi.$$

(ii) $\models \forall x \varphi \rightarrow \varphi, \quad \models \varphi \rightarrow \exists x \varphi.$

(iii) Pentru orice simbol de constantă c ,

$$\models \forall x \varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x \varphi.$$

Dem.:

(i) Fie \mathcal{A} și $e : V \rightarrow A$. Atunci

$$\mathcal{A} \models \forall x \varphi[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$$

$$\implies \text{pentru } a = u^{\mathcal{A}}(e), \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$$

$$\iff \mathcal{A} \models \varphi_x(u)[e] \quad \text{conform Lemei 1.44.(ii).}$$

A doua aserțiune rezultă din prima aplicată la $\neg \varphi$.

Propoziția 1.47

Fie φ o formulă și x o variabilă.

- (i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ ,
 $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$
- (ii) $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi, \quad \models \varphi \rightarrow \exists x\varphi.$
- (iii) Pentru orice simbol de constantă c ,
 $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$

Dem.: (continuare)

- (ii) Aplicăm (i) cu $u := x$.
 (iii) Aplicăm (i) cu $u := c$. □

În general, dacă x și y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie \mathcal{L}_{ar} , \mathcal{N} și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ a.î.
 $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \models (x < z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\models (x < z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 1.48

Pentru orice formulă φ , variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ ,

$$\exists x\varphi \models \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \models \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 1.48 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Definiția 1.49

Pentru orice formulă φ și orice variabile y_1, \dots, y_k , **varianta** y_1, \dots, y_k -**liberă** φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- ▶ dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ ;
- ▶ dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, atunci φ' este $\psi' \rightarrow \chi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w\psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \dots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul v_0, v_1, \dots , care nu apare în ψ' și nu este printre y_1, \dots, y_k .

Definiția 1.50

φ' este **variantă** a lui φ dacă este varianta y_1, \dots, y_k -**liberă** a lui φ pentru anumite variabile y_1, \dots, y_k .

Propoziția 1.51

- (i) Pentru orice formulă φ , dacă φ' este o variantă a lui φ , atunci $\varphi \models \varphi'$;
- (ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t , dacă variabilele lui t se află printre y_1, \dots, y_k și φ' este varianta y_1, \dots, y_k -**liberă** a lui φ , atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.

57

Definiția 1.52

O formulă care nu conține cuantificatori se numește **liberă de cuantificatori** ("quantifier-free").

Definiția 1.53

O formulă φ este în **formă normală prenex** dacă

$$\varphi = Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, x_1, \dots, x_n sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește **matricea** lui φ și $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ este **prefixul** lui φ .

Exemple de formule în formă normală prenex:

- ▶ Formulele **universale**: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori
- ▶ Formulele **existențiale**: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori

58

Fie φ o formulă și t_1, \dots, t_n termeni care nu conțin variabile din φ . Notăm cu $\varphi_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui x_1, \dots, x_n cu t_1, \dots, t_n respectiv.

Notatii: $\forall^c = \exists$, $\exists^c = \forall$.

Teorema 1.54 (Teorema de formă normală prenex)

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \models \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Atunci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \neg\psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă $\psi^* = Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi_0$ în formă normală prenex a.î. $\psi \models \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^c x_1 \dots Q_n^c x_n \neg\psi_0.$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $\varphi^* \models \neg\psi^* \models \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.

59

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă normală prenex

$$\psi^* = Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi_0, \quad \chi^* = S_1z_1 \dots S_mz_m\chi_0$$

a.î. $\psi \models \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \models \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$. Notăm cu V_0 mulțimea tuturor variabilelor care apar în ψ^* sau χ^* . Fie $\tilde{\psi}^*$ (resp. $\tilde{\chi}^*$) varianta V_0 -liberă a lui ψ^* (resp. χ^*). Atunci

$$\tilde{\psi}^* = Q_1y_1 \dots Q_ny_n\tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\chi}^* = S_1w_1 \dots S_mw_m\tilde{\chi}_0,$$

unde $y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_m$ sunt variabile care nu apar în V_0 , $\tilde{\psi}_0 = \psi_0_{x_1, \dots, x_n}(y_1, \dots, y_n)$ și $\tilde{\chi}_0 = \chi_0_{z_1, \dots, z_m}(w_1, \dots, w_m)$. Conform Propoziției 1.51.(i), $\tilde{\psi}^* \models \psi^*$ și $\tilde{\chi}^* \models \chi^*$. De asemenea, $FV(\tilde{\psi}^*) = FV(\psi^*)$ și $FV(\tilde{\chi}^*) = FV(\chi^*)$.

60

Definim

$$\varphi^* := Q_1^c y_1 \dots Q_n^c y_n S_1 w_1 \dots S_m w_m (\tilde{\psi}_0 \rightarrow \tilde{\chi}_0).$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\begin{aligned} \varphi^* &\models \tilde{\psi}^* \rightarrow \tilde{\chi}^* \\ &\models \psi^* \rightarrow \chi^* \\ &\models \psi \rightarrow \chi = \varphi. \end{aligned}$$

• $\varphi = \forall x \psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă normală prenex a.î. $\psi \models \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.

Definim $\varphi^* := \forall x \psi^*$. □

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține

- ▶ două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- ▶ un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- ▶ două simboluri de constante c, d .

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y (g(y, z) = c) \wedge \neg \exists x (f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned} \varphi &\models \exists y (g(y, z) = c \wedge \neg \exists x (f(x) = d)) \\ &\models \exists y (g(y, z) = c \wedge \forall x \neg (f(x) = d)) \\ &\models \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg (f(x) = d)) \end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg (f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ .

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned} \varphi &\models \exists y \neg (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\models \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\models \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\models \exists y \forall z \neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\models \exists y \forall z \forall x (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\models \exists y \forall z \forall x (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists v (P(x, v) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\models \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d)) \end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ .

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite **simboluri de funcții/constante Skolem**.

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui \mathcal{L} care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, x_1, \dots, x_n sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Forma normală Skolem

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:
 Dacă φ este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$
 și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.

Altfel, φ are una din formele:

- ▶ $\varphi = \exists x \psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- ▶ $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$ ($k \geq 1$). Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi_x(fx_1 \dots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ .

Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \dots$, până ajungem la o formulă universală și aceasta este φ^{Sk} .

φ^{Sk} este o **formă normală Skolem** a lui φ .

65

Forma normală Skolem

Exemple

- ▶ Fie θ o formulă liberă de cuantificatori a.î. $FV(\theta) = \{x\}$ și $\varphi = \exists x \theta$. Atunci $\varphi^1 = \theta_x(c)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$.
- ▶ Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z R(x, y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y \forall z (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z R(c, y, z)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z R(c, y, z)$.
- ▶ Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z P(y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y P(y, f(y))$, unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y P(y, f(y))$.

66

Forma normală Skolem

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f . Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\ &= \forall y \forall u \exists v (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v), \end{aligned}$$

unde g este un nou simbol de funcție unară

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y, u)) \\ &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)), \end{aligned}$$

unde h este un nou simbol de funcție binară.

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)).$$

67

Forma normală Skolem

Teorema 1.55 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie φ un enunț în formă normală prenex.

- (i) $\models \varphi^{Sk} \rightarrow \varphi$, deci $\varphi^{Sk} \models \varphi$ în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.
- (ii) φ este satisfiabilă dacă și numai dacă φ^{Sk} este satisfiabilă.

Dem.:

- (i) Se aplică faptul că $\models \varphi_x(t) \rightarrow \exists x \varphi$, $\models \varphi$ implică $\models \forall x \varphi$ și $\models \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$ pentru a concluda că $\models \varphi^1 \rightarrow \varphi$, $\models \varphi^2 \rightarrow \varphi^1$, etc..

- (ii) " \Leftarrow " Se aplică (i). " \Rightarrow " **Exercițiu suplimentar.** □

68

Observație

În general, φ și φ^{Sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

Dem.: Fie $\mathcal{L} = (R)$, unde R este simbol de relație binară și $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$. Atunci $\varphi^{Sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$ (unde f este un nou simbol de funcție unară) și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = (f, R)$. Fie $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ -structura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$, unde $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\mathcal{A} \models \varphi$, deoarece pentru orice număr întreg m există un număr întreg n a.î. $m < n$. Pe de altă parte, $\mathcal{A} \not\models \varphi^{Sk}$, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$. \square

Notăție: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , notăm

$Mod(\Gamma) :=$ clasa modelelor lui Γ .

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

Lema 1.56

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ ,

- (i) $\Gamma \models \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.
- (ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.
- (iii) Γ este satisfiabilă $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 1.57

O \mathcal{L} -teorie este o mulțime T de enunțuri ale lui \mathcal{L} care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 1.58

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , teoria generată de Γ este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Propoziția 1.59

- (i) $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$.
- (ii) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.
- (iii) $Th(\Gamma)$ este o teorie.
- (iv) $Th(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.:

- (i) Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \models \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$.
- (ii) " \supseteq " Conform (i) și Lemei 1.56.(ii).
" \subseteq " Conform definiției lui $Th(\Gamma)$.
- (iii) Pentru orice enunț φ , avem că
 $Th(\Gamma) \models \varphi \iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$
 $\iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ (conform (ii)) $\iff \varphi \in Th(\Gamma)$.
- (iv) Fie T o teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \models \varphi$. Deoarece T este teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$. \square

Propoziția 1.60

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ ,

- (i) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Th(\Gamma) \subseteq Th(\Delta)$.
- (ii) Γ este teorie $\iff \Gamma = Th(\Gamma)$.
- (iii) $Th(\emptyset) = \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț valid}\}$ este inclusă în orice teorie.

Dem.: Exercițiu ușor.

- ▶ O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește **teorie axiomatică** sau teorie prezentată **axiomatic**. Γ se numește mulțime de **axiome** pentru $Th(\Gamma)$.
- ▶ Orice teorie poate fi prezentată axiomatice, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

73

Definiția 1.61

O teorie T este **finit axiomatizabilă** dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ .

Definiția 1.62

O clasă \mathcal{K} de \mathcal{L} -structuri este **axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ . Spunem și că Γ **axiomatizează** \mathcal{K} .

Definiția 1.63

O clasă \mathcal{K} de \mathcal{L} -structuri este **finit axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime **finită** de enunțuri Γ .

74

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- ▶ $\mathcal{L}_{\equiv} = (\equiv, \emptyset, \emptyset) = (\equiv)$
- ▶ \mathcal{L}_{\equiv} -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde \equiv este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

- (REFL) := $\forall x(x \equiv x)$
- (SIM) := $\forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$
- (TRANZ) := $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este

$$T := Th((REFL), (SIM), (TRANZ)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ Fie \mathcal{K} clasa structurilor (A, \equiv) , unde \equiv este relație de echivalență pe A .
- ▶ $\mathcal{K} = Mod(T)$, deci T axiomatizează \mathcal{K} .
- ▶ Spunem și că T axiomatizează clasa relațiilor de echivalență.

75

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y (\neg(x = y) \wedge x \equiv y \wedge \forall z(z \equiv x \rightarrow (z = x \vee z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

76

Exemple - Teoria grafurilor

Un **graf** este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V . Elementele lui V se numesc **vârfuri**, iar elementele lui E se numesc **muchii**.

$$\blacktriangleright \mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$$

$\blacktriangleright \mathcal{L}_{Graf}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(IREFL) := \forall x \neg \dot{E}(x, x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).$$

Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- $\blacktriangleright T$ este finit axiomatizabilă.
- \blacktriangleright modelele lui T sunt grafurile.
- $\blacktriangleright T$ axiomatizează clasa grafurilor.

77

Exemple - Teoria ordinii parțiale

$$\blacktriangleright \mathcal{L}_{\leq} = (\leq, \emptyset, \emptyset) = (\leq)$$

$\blacktriangleright \mathcal{L}_{\leq}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde \leq este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(REFL) := \forall x (x \leq x)$$

$$(ANTISIM) := \forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- $\blacktriangleright T$ este finit axiomatizabilă.
- \blacktriangleright modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- $\blacktriangleright T$ axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.

78

Exemple - Teoria ordinii stricte

$$\blacktriangleright \mathcal{L}_{<} = (<, \emptyset, \emptyset) = (<)$$

$\blacktriangleright \mathcal{L}_{<}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(IREFL) := \forall x \neg (x < x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- $\blacktriangleright T$ este finit axiomatizabilă.
- \blacktriangleright modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- $\blacktriangleright T$ axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.

79

Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x = y \vee x < y \vee y < x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- $\blacktriangleright T$ este finit axiomatizabilă.
- \blacktriangleright modelele lui T sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- $\blacktriangleright T$ axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.

80

Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

$$(DENS) := \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.

81

Exemple - Teoria egalității

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 1.64

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

82

Exemple - Teoria egalității

Notății

- ▶ Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x (x = x)$.
- ▶ $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- ▶ $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 1.65

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\leq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel mult } n \text{ elemente}$$

$$\mathcal{A} \models \exists^{=n} \iff \mathcal{A} \text{ are exact } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.66

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models T \iff \mathcal{A} \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

83

Teorema de compacitate

Teorema 1.67 (Teorema de compacitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- ▶ unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

84

Teorema de compacitate - aplicații

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 1.68

Clasa \mathcal{L} -structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

(*) pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură finită a.î. $|\mathcal{A}| \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$ și $\mathcal{A} \models \Gamma$ deoarece \mathcal{A} este finită.

85

Teorema de compacitate - aplicații

Prin urmare, $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \models \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model \mathcal{B} .

Deoarece $\mathcal{B} \models \Gamma$, \mathcal{B} este finită.

Deoarece $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că \mathcal{B} este infinită.

Am obținut o contradicție. □

Corolar 1.69

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{=}$.

86

Teorema de compacitate - aplicații

Propoziția 1.70

Clasa \mathcal{L} -structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu \mathcal{K}_{Inf} clasa \mathcal{L} -structurilor infinite.

Conform Propoziției 1.66, pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

87

Teorema de compacitate - aplicații

Presupunem că \mathcal{K}_{Inf} este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\varphi)$.

Rezultă că pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa \mathcal{L} -structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 1.68. □

Corolar 1.71

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{=}$.

88

Propoziția 1.72

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui \mathcal{L} cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit \mathcal{A} a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$, deci $\mathcal{A} \models \Delta_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Δ are un model \mathcal{B} . Prin urmare, \mathcal{B} este un model infinit al lui Γ . □

Propoziția 1.73

Dacă un enunț φ este adevărat în orice \mathcal{L} -structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice \mathcal{L} -structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 1.72, rezultă că Γ are un model infinit \mathcal{A} . Prin urmare, $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. □

Propoziția 1.74

Fie Γ o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci

- (i) Γ are un model infinit.
- (ii) Clasa modelelor finite ale lui Γ nu este axiomatizabilă.
- (iii) Clasa modelelor infinite ale lui Γ este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Exercițiu.

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, \dot{S} este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție \mathcal{L} -termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie \mathcal{L} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 1.75

O \mathcal{L} -structură \mathcal{A} se numește **non-standard** dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește **element non-standard**.

Teoria lui \mathcal{N} se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \models \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 1.76

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \dots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

Fie $n_0 > \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Considerăm extensia \mathcal{N}^+ a lui \mathcal{N} la \mathcal{L}^+ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \models \Gamma_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că $a := c^{\mathcal{A}}$ este element non-standard al lui \mathcal{A} . □

SINTAXA

Sintaxa

Definiția 1.77

Mulțimea $LogAx_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ a **axiomelor logice** ale lui \mathcal{L} constă din:

- (i) toate tautologiile;
- (ii) pentru orice termeni s, t, u , toate formulele de forma

$$t = t, \quad s = t \rightarrow t = s, \quad s = t \wedge t = u \rightarrow s = u;$$
- (iii) pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_m, t_m$, toate formulele de forma

$$t_1 = u_1 \wedge \dots \wedge t_m = u_m \rightarrow ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m,$$

$$t_1 = u_1 \wedge \dots \wedge t_m = u_m \rightarrow (Rt_1 \dots t_m \leftrightarrow Ru_1 \dots u_m);$$
- (iv) toate formulele de forma

$$\varphi_x(t) \rightarrow \exists x \varphi,$$
 unde $\varphi_x(t)$ este o substituție liberă (**\exists -axiomele**).

Axiomele de la (ii) și (iii) se numesc și **axiomele egalității**.

Definiția 1.78

Regulile de deducție (sau inferență) sunt următoarele: pentru orice formule φ, ψ ,

(i) din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (*modus ponens* sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi};$$

(ii) dacă $x \notin FV(\psi)$, atunci din $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă $\exists x\varphi \rightarrow \psi$ (*\exists -introducerea*):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x\varphi \rightarrow \psi} \text{ dacă } x \notin FV(\psi).$$

97

Fie Γ o mulțime de formule ale lui \mathcal{L} .

Definiția 1.79

Mulțimea $Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ a Γ -teoremelor lui \mathcal{L} este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

- (i) $Ax_{m_{\mathcal{L}}} \subseteq \Sigma$;
- (ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;
- (iii) Σ este închisă la regulile de deducție, i.e.
 - (a) dacă $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$;
 - (b) dacă $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\exists x\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$.

Dacă $\varphi \in Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele** Γ .

98

Notatii

- $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$:= φ este Γ -teoremă
- $Thm_{\mathcal{L}}$:= $Thm_{\mathcal{L}}(\emptyset)$
- $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$:= $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$
- $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Delta$:= $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

Definiția 1.80

O formulă φ se numește **teoremă (logică)** a lui \mathcal{L} dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Convenție

Când \mathcal{L} este clar din context, scriem $LogAx$, Thm , $Thm(\Gamma)$, $\Gamma \vdash \varphi$, $\vdash \varphi$, etc..

99

Lema 1.81

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ , au loc următoarele proprietăți:

- (i) dacă φ este axiomă logică, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$;
- (iv) dacă $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\Gamma \vdash \exists x\varphi \rightarrow \psi$.

100

Definiția 1.82

O Γ -demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$;
- (iv) există $j < i$ și $x \in V$, φ, ψ formule a.î. $x \notin FV(\psi)$,
 $\theta_j = \varphi \rightarrow \psi$ și $\theta_i = \exists x \varphi \rightarrow \psi$.

O \emptyset -demonstrație se va numi simplu **demonstrație**.

101

Definiția 1.83

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau **demonstrație a lui φ din ipotezele Γ** este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește **lungimea** Γ -demonstrației.

Propoziția 1.84

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

102

Propoziția 1.85

Pentru orice mulțimi de formule Γ și orice formulă φ , $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: " \Leftarrow " Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Deoarece $\Sigma \subseteq \Gamma$, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.

" \Rightarrow " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 1.84, φ are o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \dots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$ este o Σ -demonstrație a lui φ , deci $\Sigma \vdash \varphi$. □

103

Teorema 1.86 (Teorema tautologiei)

Dacă ψ este consecință tautologică a formulelor $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ și $\Gamma \vdash \varphi_1, \dots, \Gamma \vdash \varphi_n$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

Teorema 1.87 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \cup \{\psi\}$ o mulțime de formule și φ un **enunț**. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

104

Închiderea universală

Definiția 1.88

Fie φ o formulă a.î. $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$. **Închiderea universală** a lui φ este enunțul

$$\overline{\varphi} := \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi.$$

Notație: Dacă Γ este o mulțime de formule, $\overline{\Gamma} := \{\overline{\varphi} \mid \varphi \in \Gamma\}$.

Observație

φ enunț $\implies \overline{\varphi} = \varphi$; Γ mulțime de enunțuri $\implies \overline{\Gamma} = \Gamma$.

Propoziția 1.89

Dacă Γ este mulțime de enunțuri, atunci pentru orice φ ,

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \models \overline{\varphi}.$$

Dem.: Exercițiu.

105

Teorema de corectitudine

Teorema 1.90 (Teorema de corectitudine ("soundness"))

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \overline{\Gamma} \models \varphi.$$

În particular, dacă Γ este mulțime de enunțuri, atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi.$$

106

Mulțimi consistente

Definiția 1.91

O mulțime Γ de formule se numește **consistentă** dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.

Γ se numește **inconsistentă** dacă nu este consistentă, i.e. $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ .

Propoziția 1.92

Pentru orice mulțime Γ de formule, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă;
- (ii) pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$;
- (iii) există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

Dem.: Exercițiu.

107

Mulțimi consistente

Propoziția 1.93

Pentru orice mulțime Γ de formule, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă;
- (ii) Γ are o submulțime finită inconsistentă.

Dem.: (ii) \implies (i) Exercițiu imediat.

(i) \implies (ii) Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci există ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$. Aplicând Propoziția 1.85, obținem submulțimi finite Σ_1, Σ_2 ale lui Γ a.î. $\Sigma_1 \vdash \psi$ și $\Sigma_2 \vdash \neg\psi$. Fie $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Atunci Σ este submulțime finită a lui Γ care este inconsistentă. \square

Un rezultat echivalent:

Propoziția 1.94

O mulțime Γ de formule este consistentă dacă și numai dacă orice submulțime finită a lui Γ este consistentă.

108

Propoziția 1.95

Fie Γ o mulțime de formule și φ un enunț.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Dem.: (i) " \Rightarrow " $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \implies \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

" \Leftarrow "

(1) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă

(2) $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$ Teorema deducției

(3) $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ tautologie

(4) $\Gamma \vdash \varphi$ (MP): (2),(3)

(ii) Exercițiu. □

109

Teorema 1.96 (Teorema de completitudine (prima formă))

Orice mulțime consistentă de enunțuri Γ este satisfiabilă.

- ▶ Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat
- ▶ Henkin a dat în 1949 o demonstrație simplificată.

110

Teorema 1.97 (Teorema de completitudine (a doua formă))

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ și orice enunț φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: " \Rightarrow " Aplicăm Teorema de corectitudine 1.90.

\Leftarrow Presupunem că $\Gamma \not\vdash \varphi$. Atunci, conform Propoziției 1.95.(i), $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistentă. Aplicăm Teorema de completitudine (prima formă) pentru a concluda că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ are un model \mathcal{A} . Deoarece $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $\Gamma \models \varphi$, obținem că \mathcal{A} este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. În particular, $\mathcal{A} \models \varphi$ și $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, ceea ce este o contradicție. □

111

LOGICI MODALE

Referința de bază:

P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, Modal logic, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 53, Cambridge University Press, 2001

112

Definiția 2.1

O **structură relațională** este un tuplu \mathcal{F} format din:

- ▶ o mulțime nevidă W , numită **universul** (sau **domeniul**) lui \mathcal{F}
- ▶ o mulțime de relații pe W .

Presupunem că fiecare structură relațională conține cel puțin o relație. Elementele lui W se numesc **puncte**, **noduri**, **stări**, **lumi**, **timpi**, **instanțe** sau **situații**.

Exemplul 2.2

O mulțime parțial ordonată $\mathcal{F} = (W, R)$, unde R este o relație binară pe W care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

Sistemele de tranziții etichetate (*Labeled Transition Systems*), sau, mai simplu, sistemele de tranziții, sunt structuri relaționale simple, foarte folosite în informatică. Folosim în continuare abrevierea LTS pentru aceste sisteme.

Definiția 2.3

Un **LTS** este o pereche $(W, \{R_a \mid a \in A\})$, unde W este o mulțime nevidă de **stări**, A este o mulțime nevidă de **etichete** și, pentru fiecare $a \in A$, $R_a \subseteq W \times W$ este o relație binară pe W .

Sistemele de tranziții pot fi văzute ca modele abstracte de calcul: stările sunt stările posibile ale unui calculator, etichetele sunt programe și $(u, v) \in R_a$ înseamnă că există o execuție a programului a care începe în starea u și se termină în starea v .

Fie W o mulțime nevidă și $R \subseteq W \times W$ o relație binară.

Scriem de obicei Rwv în loc de $(w, v) \in R$. Dacă Rwv , atunci spunem că v este **R -accesibil** din w .

Inversa lui R se notează R^{-1} și se definește astfel:

$$R^{-1}vw \text{ ddacă } Rvw.$$

Definim $R^n (n \geq 0)$ inductiv:

$$R^0 = \{(w, w) \mid w \in W\}, R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n.$$

Așadar, pentru orice $n \geq 2$, avem că $R^n wv$ ddacă există u_1, \dots, u_{n-1} a.î $Rwu_1, Ru_1u_2, \dots, Ru_{n-1}v$.

Definiția 2.4

Limbajul modal de bază ML_0 este format din:

- ▶ o mulțime **PROP** de **propoziții atomice** (notate p, q, r, v, \dots);
- ▶ **conectorii propoziționali**: \neg, \rightarrow ;
- ▶ **constanta propozițională** \perp (**falsul**);
- ▶ **parantezele**: $(,)$;
- ▶ **operatorul modal** \diamond ('diamond') (se citește **diamant**).

Operatorul modal dual

Dualul lui \diamond se notează \square (se citește **cutie**) și se definește astfel:

$$\square\varphi := \neg\diamond\neg\varphi.$$

Definiția 2.5

Formulele limbajului modal de bază ML_0 sunt expresiile definite astfel:

- (F0) Orice propoziție atomică este formulă.
- (F1) \perp este formulă.
- (F2) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F3) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F4) Dacă φ este formulă, atunci $(\diamond\varphi)$ este formulă.
- (F5) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3), (F4) sunt formule.

Observație

Formulele lui ML_0 sunt definite, folosind notația Backus-Naur, astfel:

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \mid (\diamond\varphi), \quad \text{unde } p \in PROP.$$

Trei interpretări ale operatorilor modali \diamond și \square au fost extrem de influente.

Logica modală clasică

În logica modală clasică, $\diamond\varphi$ este citit ca **este posibil ca φ** . Atunci $\square\varphi$ înseamnă **nu este posibil ca non φ** , adică **este necesar φ** .

Exemple de formule pe care le putem privi ca principii corecte includ:

- ▶ $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$ (**ce este necesar este și posibil**)
- ▶ $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$ (**ce este, este posibil**).

Ce putem spune despre formule ca $\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$ (**ce este, este necesar posibil**) sau $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$ (**ce este posibil, este necesar posibil**)? Pot fi ele privite ca adevăruri generale? Pentru a da un răspuns la astfel de întrebări trebuie să definim o semantică pentru logica modală clasică.

Logica epistemică

În logica epistemică, limbajul modal de bază este folosit pentru a raționa despre cunoaștere. În această logică,

$\square\varphi$ se citește **agentul știe că φ** .

Se scrie $K\varphi$ în loc de $\square\varphi$.

Deoarece discutăm despre cunoaștere, este natural să considerăm că este adevărată formula

$$K\varphi \rightarrow \varphi \quad (\text{dacă agentul știe că } \varphi, \text{ atunci } \varphi \text{ trebuie să aibă loc})$$

Presupunând că agentul nu este atotștiutor, formula $\varphi \rightarrow K\varphi$ ar trebui să fie falsă.

Logica demonstrabilității (Provability logic)

În această logică,

$\square\varphi$ se citește **se poate demonstra (într-o teorie aritmetică) faptul că φ** .

O temă centrală a logicii demonstrabilității este găsirea de axiomatizări complete pentru principii de demonstrabilitate care sunt valide pentru diverse teorii aritmetice (cum ar fi aritmetica Peano).

O formulă foarte importantă în acest context este **formula Löb**:

$$\square(\square p \rightarrow p) \rightarrow \square p$$

Definiția 2.6

Un limbaj modal ML este format din:

- ▶ o mulțime $PROP$ de **propoziții atomice** ;
- ▶ conectorii propoziționali: \neg, \rightarrow ;
- ▶ constanta propozițională \perp (**falsul**);
- ▶ parantezele: $(,)$;
- ▶ o mulțime O de **operatori modali sau modalități**;
- ▶ o funcție **aritate** $\rho : O \rightarrow \mathbb{N}$.

ML este unic determinat de $PROP$ și de perechea $\tau := (O, \rho)$. Folosim și notația $ML := ML(PROP, \tau)$ pentru a specifica acest fapt. τ se numește **tipul de similaritate** al lui ML .

Limbajul modal de bază

Notăm cu τ_0 tipul de similaritate al limbajului modal de bază ML_0 , deci $ML_0 = ML(PROP, \tau_0)$. Atunci $\tau_0 = (\{\diamond\}, \rho)$ cu $\rho(\diamond) = 1$.

Fie $ML := ML(PROP, \tau)$ un limbaj modal.

- Propozițiile atomice se notează p, q, r, v, \dots
- Elementele lui O se notează $\Delta, \Delta_0, \Delta_1, \dots$ și se numesc **operatori modali**.
- Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, notăm $O_m := \{\Delta \in O \mid \rho(\Delta) = m\}$. Așadar, O_m este mulțimea operatorilor modali de aritate m .
- Operatorii modali unari sunt cei de aritate 1. Ne referim adesea la ei ca **diamante** și îi notăm de multe ori \diamond_a sau $\langle a \rangle$, unde a este un element dintr-o mulțime de indici.
- Definiția permite și operatorii modali de aritate 0, care se mai numesc și **constante modale**.

Mulțimea $Sim(ML)$ a **simbolurilor** lui ML este

$$Sim(ML) := PROP \cup \{\neg, \rightarrow, \perp, (,)\} \cup O.$$

Mulțimea $Expr(ML)$ a **expresiilor** lui ML este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui ML .

Definiția 2.7

Formulele lui ML sunt expresiile lui ML definite astfel:

- (F0) Orice propoziție atomică este formulă.
- (F1) \perp este formulă.
- (F2) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F3) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F4) Dacă $m \in \mathbb{N}$, $\Delta \in O_m$ și $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sunt formule, atunci $(\Delta(\varphi_1 \dots \varphi_m))$ este formulă.
- (F5) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3), (F4) sunt formule.

Notație: Mulțimea formulelor se notează $Form(ML)$.

- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3), (F4) de un număr finit de ori.
- $Form(ML) \subseteq Expr(ML)$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Observație

Mulțimea $Form(ML)$ este definită folosind notația Backus-Naur, astfel:

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \mid (\Delta(\varphi_1 \dots \varphi_{\rho(\Delta)})), \quad \text{unde } p \in PROP.$$

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = p$, unde p este propoziție atomică;
- ▶ $\varphi = \perp$;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;
- ▶ $\varphi = (\Delta(\psi_1 \dots \psi_m))$, unde $m \in \mathbb{N}$, $\Delta \in O_m$ și ψ_1, \dots, ψ_m sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Conectorii propoziționali $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ și constanta \top (**adevărul**) sunt definiți ca în logica propozițională clasică:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) & \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) & \top &:= \neg\perp. \end{aligned}$$

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Scriem $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \Delta(\varphi_1 \dots \varphi_m)$.
- Uneori scriem $\Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ în loc de $\Delta(\varphi_1 \dots \varphi_m)$.
- Dacă Δ este un diamant, atunci scriem $\Delta\varphi$ în loc de $\Delta(\varphi)$. Prin urmare, scriem $\diamond_a\varphi$ sau $\langle a \rangle \varphi$.
- Operatorii modali binari sunt cei de aritate 2. Pentru aceștia folosim adesea notația infixă: scriem $\varphi\Delta\psi$ în loc de $\Delta(\varphi, \psi)$.
- Operatorii modali au precedență mai mare decât ceilalți conectori, \neg are precedență mai mare decât ceilalți conectori propoziționali.

Operatorii modali duali

Definim acum **operatori duali** pentru modalitățile de aritate ≥ 1 . Fie $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ și $\Delta \in O_m$. Dualul ∇ al lui Δ este definit astfel:

$$\nabla(\varphi_1 \dots \varphi_m) := \neg\Delta(\neg\varphi_1 \dots \neg\varphi_m).$$

Ca și în logica modală de bază, dualul unui diamant se numește **cutie**. Dualul lui \diamond_a se notează \square_a , iar dualul lui $\langle a \rangle$ se notează $[a]$. Așadar,

$$\square_a\varphi = \neg\diamond_a\neg\varphi, \quad [a] = \neg\langle a \rangle\neg\varphi.$$

Fie tipul de similaritate $\tau = (O, \rho)$, unde $O = \{\langle F \rangle, \langle P \rangle\}$ și $\rho(\langle F \rangle) = \rho(\langle P \rangle) = 1$. Limbajul determinat de τ (și de $PROP$) se numește **limbajul temporal de bază** și este limbajul pe care se fundamentează **logica temporală**, una din cele mai importante logici modale, cu foarte multe aplicații în informatică.

Interpretarea intenționată pentru operatorii modali $\langle F \rangle, \langle P \rangle$ este:

- ▶ $\langle F \rangle \varphi$ se citește φ va fi adevărată cândva (într-un moment) în viitor (în engleză, φ will be true at some Future time). Prin urmare, F vine de la Future.
- ▶ $\langle P \rangle \varphi$ se citește φ a fost adevărată cândva (într-un moment) din trecut (în engleză, φ was true at some Past time). Prin urmare, P vine de la Past.

Este tradițional să scriem F în loc de $\langle F \rangle \varphi$ și P în loc de $\langle P \rangle \varphi$. Dualul lui F se notează G , iar dualul lui P se notează H . Așadar, interpretarea pentru operatorii G, H este:

- ▶ $G\varphi$ se citește φ va fi adevărată în orice moment viitor (în engleză, *it is always Going to be the case that φ*).
- ▶ $H\varphi$ se citește φ a fost adevărată în orice moment din trecut (în engleză, *it always Has been the case that φ*).

Fie $ML := ML(PROP, \tau)$ un limbaj modal.

Definiția 2.8

O **substituție** este o funcție $\sigma : PROP \rightarrow Form(ML)$.

O astfel de substituție σ induce o funcție

$$(\cdot)^\sigma : Form(ML) \rightarrow Form(ML)$$

definită recursiv astfel:

$$p^\sigma = \sigma(p)$$

$$\perp^\sigma = \perp$$

$$(\neg\varphi)^\sigma = \neg\varphi^\sigma$$

$$(\psi \rightarrow \varphi)^\sigma = \psi^\sigma \rightarrow \varphi^\sigma$$

$$(\Delta(\varphi_1 \dots \varphi_m))^\sigma = \Delta(\varphi_1^\sigma \dots \varphi_m^\sigma) \text{ dacă } \Delta \in O_m$$

Această definiția formalizează riguros ce se înțelege prin **substituție uniformă**.

Rezultă imediat că

- ▶ $\top^\sigma = \top$, $(\psi \wedge \varphi)^\sigma = \psi^\sigma \wedge \varphi^\sigma$ și $(\psi \vee \varphi)^\sigma = \psi^\sigma \vee \varphi^\sigma$
- ▶ $(\nabla(\varphi_1 \dots \varphi_m))^\sigma = \nabla(\varphi_1^\sigma \dots \varphi_m^\sigma)$.

Definiția 2.9

Spunem că ψ este **instanță de substituție** (substitution instance) a lui φ dacă există o substituție σ astfel încât $\varphi^\sigma = \psi$.

Exemplul 2.10

În ML_0 considerăm substituția σ definită astfel:

$$\sigma(p) = (p \wedge \Box q), \sigma(q) = (\Diamond \Diamond q \vee r), \sigma(v) = v \text{ dacă } v \in PROP \setminus \{p, q\}.$$

Atunci

$$(p \wedge q \wedge r)^\sigma = ((p \wedge \Box q) \wedge (\Diamond \Diamond q \vee r) \wedge r).$$

SEMANTICA

În continuare dăm semantica limbajelor modale cu ajutorul structurilor relaționale. Facem acest lucru în două moduri:

- ▶ la nivelul **modelelor**, unde definim noțiunile fundamentale de **satisfacere și adevăr**;
- ▶ la nivelul **cadrelor**, unde definim noțiunea cheie de **validitate**.

Definim, mai întâi, cadrele, modelele și relația de satisfacere pentru limbajul modal de bază $ML_0 = ML(PROP, \tau_0)$.

Definiția 2.11

Un **cadru (frame)** pentru ML_0 este o pereche $\mathcal{F} = (W, R)$ astfel încât

- ▶ W este o mulțime nevidă;
- ▶ R este o relație binară pe W .

Așadar, un cadru este pur și simplu o structură relațională cu o singură relație binară.

133

Definiția 2.12

Un **model** pentru ML_0 este o pereche $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, unde

- ▶ $\mathcal{F} = (W, R)$ este un cadru pentru ML_0 ;
- ▶ $V : PROP \rightarrow 2^W$ este o funcție numită **evaluare**.

Prin urmare, funcția V asignează oricărei propoziții atomice $p \in PROP$ submulțimea $V(p)$ a lui W . Informal, ne gândim la $V(p)$ ca la mulțime punctelor din modelul \mathcal{M} în care p este adevărată.

Se observă că modelele pot fi de asemenea văzute ca structuri relaționale într-un mod natural:

$$\mathcal{M} = (W, R, \{V(p) \mid p \in PROP\}).$$

Un model este o structură relațională care constă într-un domeniu, o relație binară și relațiile unare $V(p)$, $p \in PROP$. Cadrul \mathcal{F} și modelul \mathcal{M} sunt două structuri relaționale având același univers. Totuși, așa cum vom vedea, modelele și cadrele sunt folosite în moduri foarte diferite.

134

Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model. Scriem și $\mathcal{M} = (W, R, V)$.

Spunem că modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ este **bazat pe** cadrul $\mathcal{F} = (W, R)$ sau că \mathcal{F} este cadrul **support** al lui \mathcal{M} . Elementele lui W se numesc **stări** în \mathcal{F} sau în \mathcal{M} . Scriem de multe ori $w \in \mathcal{F}$ sau $w \in \mathcal{M}$.

Observație

Elementele din W se mai numesc și **lumi** sau **lumi posibile**, având ca inspirație filosofia lui Leibniz și interpretarea limbajului modal de bază, în care $\Diamond\varphi$ înseamnă **posibil** φ și $\Box\varphi$ înseamnă **necesar** φ . În concepția lui Leibniz, **necesitate** înseamnă **adevăr în toate lumile posibile** și **posibilitate** înseamnă **adevăr într-o lume posibilă**.

135

Interpretăm în continuare limbajul ML_0 , definind următoarea noțiune de satisfacere.

Definiția 2.13

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model și w o stare în \mathcal{M} . Definim inductiv noțiunea

formula φ este **satisfăcută** (sau **adevărată**) în \mathcal{M} în starea w ,
notație $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$

$$\mathcal{M}, w \Vdash p \quad \text{dacă} \quad w \in V(p), \quad \text{unde } p \in PROP$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \perp \quad \text{niciodată}$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \neg\varphi \quad \text{dacă} \quad \text{nu este adevărat că } \mathcal{M}, w \Vdash \varphi$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{dacă} \quad \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \text{ implică } \mathcal{M}, w \Vdash \psi$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \quad \text{dacă} \quad \text{există } v \in W \text{ a.î. } Rww \text{ și } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.$$

136

Notăție

Dacă \mathcal{M} nu satisface φ în w , scriem $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$ și spunem că φ este **falsă** în \mathcal{M} în starea w .

Rezultă din Definiția 2.13 că pentru orice model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ și pentru orice stare $w \in W$,

- ▶ $\mathcal{M}, w \not\models \perp$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$ ddacă $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$.

Notăție

Extindem evaluarea V de la propoziții atomice la formule arbitrare φ a.î. $V(\varphi)$ este mulțimea tuturor stărilor din \mathcal{M} în care φ este adevărată:

$$V(\varphi) = \{w \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}.$$

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model și w o stare în \mathcal{M} .

Observație

Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models \varphi \vee \psi & \text{ ddacă } \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sau } \mathcal{M}, w \models \psi \\ \mathcal{M}, w \models \varphi \wedge \psi & \text{ ddacă } \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ și } \mathcal{M}, w \models \psi \end{aligned}$$

Propoziția 2.14

Pentru orice formulă φ ,

$$\mathcal{M}, w \models \Box\varphi \text{ ddacă pentru orice } v \in W, R w v \text{ implică } \mathcal{M}, v \models \varphi.$$

Dem.: Exercițiu.

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model și w o stare în \mathcal{M} .

Propoziția 2.15

Pentru orice $n \geq 1$ și orice formulă φ , definim

$$\Diamond^n \varphi := \underbrace{\Diamond \Diamond \dots \Diamond}_{n \text{ ori}} \varphi, \quad \Box^n \varphi := \underbrace{\Box \Box \dots \Box}_{n \text{ ori}} \varphi.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models \Diamond^n \varphi & \text{ ddacă există } v \in V \text{ a.î. } R^n w v \text{ și } \mathcal{M}, v \models \varphi \\ \mathcal{M}, w \models \Box^n \varphi & \text{ ddacă pentru orice } v \in V, R^n w v \text{ implică } \mathcal{M}, v \models \varphi. \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model.

Definiția 2.16

- ▶ O formulă φ este **global adevărată** sau **simplu adevărată** în \mathcal{M} dacă $\mathcal{M}, w \models \varphi$ pentru orice $w \in W$. **Notăție:** $\mathcal{M} \models \varphi$
- ▶ O formulă φ este **satisfiabilă** în \mathcal{M} dacă există o stare $w \in W$ a.î. $\mathcal{M}, w \models \varphi$.

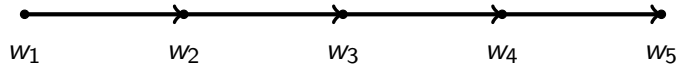
Definiția 2.17

Fie Σ o mulțime de formule.

- ▶ Σ este **adevărată** în starea w în \mathcal{M} dacă $\mathcal{M}, w \models \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Sigma$. **Notăție:** $\mathcal{M}, w \models \Sigma$
- ▶ Σ este **global adevărată** sau **simplu adevărată** în \mathcal{M} dacă $\mathcal{M}, w \models \Sigma$ pentru orice stare w din \mathcal{M} . **Notăție:** $\mathcal{M} \models \Sigma$
- ▶ Σ este **satisfiabilă** în \mathcal{M} dacă există o stare $w \in W$ a.î. $\mathcal{M}, w \models \Sigma$.

Exemplul 2.18

Fie cadrul $\mathcal{F} = (W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, R)$, unde Rw_iw_j ddacă $j = i + 1$:



Alegem o evaluare V astfel încât $V(p) = \{w_2, w_3\}$,

$V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ și $V(r) = \emptyset$.

Considerăm modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$. Atunci

- (i) $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Box p$
- (ii) $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Diamond\Box p \rightarrow p$
- (iii) $\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond(p \wedge \neg r)$
- (iv) $\mathcal{M}, w_1 \models q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)))$
- (v) $\mathcal{M} \models \Box q$.

Dem.: Exercițiu.

Noțiunea de satisfacere este **internă** și **locală**. Evaluăm formulele în interiorul modelelor, într-o stare particulară w (starea curentă). În cazul operatorilor modali \Diamond, \Box , nu verificăm adevărul lui φ în toate stările din W ci numai în acele care sunt R -accesibile din starea curentă.

Aceasta nu este o slăbiciune a noțiunii de satisfacere, ci, dimpotrivă, ne permite o foarte mare flexibilitate. Dacă luăm $R = W \times W$, atunci toate stările sunt accesibile din w , iar dacă luăm $R = \{(v, v) \mid v \in W\}$, atunci w este singura stare accesibilă din w . Acestea sunt cazurile extreme, dar, evident, sunt multe opțiuni de explorat.

Putem să ne punem următoarele întrebări naturale: ce se întâmplă dacă impunem anumite condiții asupra lui R (de exemplu, reflexivitate, simetrie, tranzitivitate, etc.), ce impact au aceste condiții asupra necesității și posibilității, ce principii sau reguli sunt justificate de aceste condiții?

Fie $ML := ML(PROP, \tau)$ un limbaj modal, unde $\tau = (O, \rho)$.

Definiția 2.19

Un **cadru (frame)** pentru ML este o pereche

$$\mathcal{F} = (W, \{R_\Delta \mid \Delta \in O\})$$

astfel încât

- ▶ W este o mulțime nevidă;
- ▶ pentru orice $\Delta \in O$, R_Δ este o relație pe W de aritate $\rho(\Delta) + 1$.

Și în acest caz, cadrele sunt structuri relaționale.

Notății

- Scriem uneori și $\mathcal{F} = (W, R_\Delta)_{\Delta \in O}$.
- Dacă O are un număr finit de operatori $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, scriem

$$\mathcal{F} = (W, R_{\Delta_1}, R_{\Delta_2}, \dots, R_{\Delta_n}).$$

Noțiunea de model se definește exact ca în cazul limbajului modal de bază.

Definiția 2.20

Un **model** pentru ML este o pereche $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, unde $\mathcal{F} = (W, \{R_\Delta \mid \Delta \in O\})$ este un cadru pentru ML și $V : PROP \rightarrow 2^W$ este o **evaluare**.

Spunem că modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ este **bazat pe** cadrul \mathcal{F} sau că \mathcal{F} este cadrul **suport** al lui \mathcal{M} .

Scriem și $\mathcal{M} = (W, \{R_\Delta \mid \Delta \in O\}, V)$.

Elementele lui W se numesc **stări** sau **lumi** în \mathcal{F} sau în \mathcal{M} . Scriem de multe ori $w \in \mathcal{F}$ sau $w \in \mathcal{M}$.

Fie $\mathcal{M} = (W, \{R_\Delta \mid \Delta \in O\}, V)$ un model și w o stare în \mathcal{M} .

Noțiunea

formula φ este **satisfăcută** (sau **adevărată**) în \mathcal{M} în starea w ,
 notație $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$

se definește inductiv. Clauzele pentru propoziții atomice, \perp , \neg , \rightarrow sunt la fel ca în cazul limbajului modal de bază.

Pentru operatori modali, avem două cazuri:

► Dacă $\Delta \in O_m$ cu $m \geq 1$, atunci

$\mathcal{M}, w \Vdash \Delta(\varphi_1 \dots \varphi_m)$ ddacă există $v_1, \dots, v_m \in W$ a.î. $R_\Delta w v_1 \dots v_m$
 și $\mathcal{M}, v_i \Vdash \varphi_i$ pentru orice $i = 1, \dots, m$

► Dacă $\rho(\Delta) = 0$, atunci

$\mathcal{M}, w \Vdash \Delta$ ddacă $w \in R_\Delta$.

Spre deosebire de alte modalități, constantele modale nu acesează alte stări. Semantica lor este similară cu cea a propozițiilor atomice, doar că relațiile unare folosite pentru a le interpreta nu sunt date de evaluare, sunt parte a cadrului suport.

Formulele **(global) adevărate** sau **satisfiabile** într-un model sunt definite exact ca în cazul limbajului modal de bază: o formulă este **(global) adevărată** (resp. satisfiabilă) într-un model ddacă este adevărată în orice stare (resp. într-o stare) a modelului.

Definim exact la fel mulțimile de formule **adevărate** într-o stare, **(global) adevărate** sau **satisfiabile**.

Ca mai înainte, extindem evaluarea V de la propoziții atomice la formule arbitrare.

Reamintim că limbajul temporal de bază are doi operatori modali unari F și P . Prin urmare, cadrele pentru acest limbaj sunt cadre

$$\mathcal{F} = (T, R_F, R_P)$$

care sunt formate dintr-o mulțime nevidă T și două relații binare pe T : R_F (relația în viitor) și R_P (relația în trecut), folosite pentru a interpreta F și P respectiv.

Totuși, având în vedere interpretarea intenționată a celor doi operatori, majoritatea acestor cadre sunt nepotrivite. Este clar că vrem să folosim cadre în care R_P este **inversa** lui R_F , adică

pentru orice $w, v \in W$, $R_F v w$ ddacă $R_P w v$.

Definiția 2.21

Un **cadru bidirecțional** este un cadru \mathcal{F} de forma $\mathcal{F} = (T, R, R^{-1})$, unde R este o relație binară. Un **model bidirecțional** este un model bazat pe un cadru bidirecțional.

Vom interpreta limbajul temporal de bază **numai** în modele bidirecționale. Așadar, dacă $\mathcal{M} = (T, R, R^{-1}, V)$ este un model bidirecțional, atunci

$\mathcal{M}, t \Vdash F\varphi$ ddacă există $s \in T$ a.î. Rts și $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$

$\mathcal{M}, t \Vdash P\varphi$ ddacă există $s \in T$ a.î. $R^{-1}ts$ și $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$

Desigur, odată ce am impus această restricție, nu este necesar să menționăm explicit R^{-1} , deoarece este determinat de R . Prin urmare, putem interpreta limbajul temporal de bază în modele $\mathcal{M} = (T, R, V)$ bazate pe cadre $\mathcal{F} = (T, R)$, folosind clauzele:

$\mathcal{M}, t \Vdash F\varphi$ ddacă există $s \in T$ a.î. Rts și $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$

$\mathcal{M}, t \Vdash P\varphi$ ddacă există $s \in T$ a.î. Rst și $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$

Am punctat astfel interacțiunea fundamentală între cele două modalități. Desigur, pentru ca modelele noastre să fie într-adevăr temporale, trebuie ca R să aibă și alte proprietăți (de exemplu, tranzitivitatea, pentru a captura fluxul timpului).

Validitatea într-un cadru este unul din conceptele cheie în logica modală.

Definiția 2.22

Fie \mathcal{F} un cadru pentru ML și φ o formulă.

- ▶ φ este **validă într-o stare** w din \mathcal{F} dacă φ este adevărată în w în orice model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ bazat pe \mathcal{F} .
- ▶ φ este **validă în \mathcal{F}** dacă este validă în orice stare w din \mathcal{F} .

Notăție: $\mathcal{F} \Vdash \varphi$

Așadar, o formulă este validă într-un cadru dacă este adevărată în orice stare din orice model bazat pe cadru.

Validitatea într-un cadru diferă în mod esențial de adevărul într-un model. Să dăm un exemplu simplu.

Dacă $\varphi \vee \psi$ este adevărată într-un model \mathcal{M} în w , atunci φ este adevărată în \mathcal{M} în w sau ψ este adevărată în \mathcal{M} în w (conform definiției satisfacției).

Pe de altă parte, dacă $\varphi \vee \psi$ este validă într-un cadru \mathcal{F} în w , nu rezultă că φ este validă în \mathcal{F} în w sau ψ este validă în \mathcal{F} în w ($p \vee \neg p$ este un contraexemplu).

Definiția 2.23

Fie \mathbf{M} o clasă de modele pentru ML, \mathbf{F} o clasă de cadre pentru ML și φ o formulă. Spunem că

- ▶ φ este **adevărată în \mathbf{M}** dacă este adevărată în orice model din \mathbf{M} . **Notăție:** $\mathbf{M} \Vdash \varphi$
- ▶ φ este **validă în \mathbf{F}** dacă este validă în orice cadru din \mathbf{F} . **Notăție:** $\mathbf{F} \Vdash \varphi$

Definiția 2.24

Mulțimea tuturor formulelor din ML care sunt valide într-o clasă de cadre \mathbf{F} se numește **logica** lui \mathbf{F} și se notează $\Lambda_{\mathbf{F}}$.

Exemplul 2.25

Considerăm limbajul modal de bază ML_0 . Formulele $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$ și $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ sunt valide în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0 .

Dem.: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru arbitrar, w o stare din \mathcal{F} și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe \mathcal{F} . Trebuie să arătăm că

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q).$$

Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(p \vee q)$. Atunci există $v \in W$ astfel încât Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash p \vee q$. Avem două cazuri:

- ▶ $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$, deci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$.
- ▶ $\mathcal{M}, v \Vdash q$. Atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond q$, deci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$.

Lășăm ca exercițiu demonstrația faptului că

$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ este validă în clasa tuturor cadrelor. □

Exemplul 2.26

Formula $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ din ML_0 nu este validă în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0 .

Dem.: Trebuie să găsim un cadru $\mathcal{F} = (W, R)$, o stare w și un model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ a.î

$$\mathcal{M}, w \not\Vdash \Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p.$$

Considerăm următorul cadru: $\mathcal{F} = (W, R)$, unde

$$W = \{0, 1, 2\}, \quad R = \{(0, 1), (1, 2)\}$$

și luăm o evaluare V a.î $V(p) = \{2\}$. Atunci $\mathcal{M}, 0 \Vdash \Diamond\Diamond p$, deoarece $R^2 0 2$ și $\mathcal{M}, 2 \Vdash p$. Dar $\mathcal{M}, 0 \not\Vdash \Diamond p$, deoarece singurul punct R -accesibil din 0 este 1 și $\mathcal{M}, 1 \not\Vdash p$. □

Definiția 2.27

Spunem că un cadru $\mathcal{F} = (W, R)$ pentru ML_0 este **tranzitiv** dacă R este tranzitivă.

Exemplul 2.28

Formula $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ din ML_0 este validă în clasa tuturor cadrelor tranzitive pentru ML_0 .

Dem.: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru tranzitiv, w o stare din \mathcal{F} și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe \mathcal{F} . Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\Diamond p$. Atunci există $u, v \in W$ a.î Rwu, Ruv și $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Deoarece R este tranzitivă, rezultă că Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Deci, $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$. □

Până acum nu am spus nimic despre consecința logică pentru limbaje modale. Ce înseamnă că o formulă este consecință logică a unei mulțimi de formule?

Introducem două familii de relații de consecință: **locală** și **globală**.

Ambele sunt definite **semantic**, în termeni de clase de structuri.

Ideile de bază sunt:

- ▶ o relație de consecință semantică are loc dacă adevărul premizelor garantează adevărul concluziei;
- ▶ inferențele depind de clasele de structuri cu care lucrăm (de exemplu, inferențele pentru cadrele tranzitive trebuie să fie diferite de cele pentru cadrele intransitive).

Prin urmare, definiția consecinței trebuie să se refere la o clasă de structuri.

Fie ML un limbaj modal și \mathbf{S} o clasă de **structuri** (cadre sau modele) pentru ML .

Dacă \mathbf{S} este clasă de modele, atunci un model **din** \mathbf{S} este pur și simplu un element \mathcal{M} al lui \mathbf{S} . Dacă \mathbf{S} este clasă de cadre, atunci un model **din** \mathbf{S} este un model bazat pe un cadru din \mathbf{S} .

Definiția 2.29 (Consecința semantică locală)

Fie Σ o mulțime de formule și φ o formulă. Spunem că φ este **consecință semantică locală a lui Σ peste \mathbf{S}** dacă pentru orice model \mathcal{M} din \mathbf{S} și orice punct w din \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Sigma \quad \text{implică} \quad \mathcal{M}, w \Vdash \varphi.$$

Notăție: $\Sigma \Vdash_{\mathbf{S}} \varphi$

Așadar, dacă Σ este adevărată într-un punct al modelului, atunci φ trebuie să fie adevărată **în același punct**. De aici vine denumirea de **locală**.

157

Observație

$$\{\psi\} \Vdash_{\mathbf{S}} \varphi \text{ ddacă } \mathbf{S} \Vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

Exemplu

Fie ML_0 limbajul modal de bază și $Tran$ clasa cadrelor tranzitive. Atunci

$$\{\diamond\diamond p\} \Vdash_{Tran} \diamond p.$$

Dar $\diamond p$ **NU** este o consecință semantică locală a lui $\diamond\diamond p$ peste clasa **tuturor** cadrelor.

158

Putem defini o altă noțiune de consecință semantică.

Definiția 2.30 (Consecința semantică globală)

Fie Σ o mulțime de formule și φ o formulă. Spunem că φ este **consecință semantică globală a lui Σ peste \mathbf{S}** dacă pentru orice structură \mathcal{S} din \mathbf{S} ,

$$\mathcal{S} \Vdash \Sigma \quad \text{implică} \quad \mathcal{S} \Vdash \varphi.$$

Notăție: $\Sigma \Vdash_{\mathbf{S}}^g \varphi$

Aici, în funcție de \mathbf{S} , \Vdash înseamnă validitate într-un cadru sau adevăr global într-un model.

159

Relațiile de consecință semantică locală și globală sunt diferite.

Exemplu

Fie ML_0 limbajul modal de bază și \mathbf{F} clasa tuturor cadrelor. Atunci

- ▶ $\Box p$ **nu** este consecința semantică locală peste \mathbf{F} a lui p .
- ▶ $\{p\} \Vdash_{\mathbf{F}} \Box p$.

Dem.:

- ▶ Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$, unde $W = \{w_1, w_2\}$, $R = W \times W$, $V(p) = \{w_1\}$, $V(q)$ arbitrar pentru $q \neq p$. Atunci $\mathcal{M}, w_1 \Vdash p$, dar $\mathcal{M}, w_1 \not\Vdash \Box p$, deoarece Rw_1w_2 și $\mathcal{M}, w_2 \not\Vdash p$.
- ▶ Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru a.î. $\mathcal{F} \Vdash p$. Trebuie să arătăm că $\mathcal{F} \Vdash \Box p$, adică: pentru orice model \mathcal{M} bazat pe \mathcal{F} și pentru orice stare w din \mathcal{M} ,

$$\text{pentru orice } v \in V, Rww \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash p.$$

Fie $v \in W$ a.î. Rww . Deoarece $\mathcal{F} \Vdash p$, avem că $\mathcal{M} \Vdash p$, deci $\mathcal{M}, v \Vdash p$. □

160

SINTAXA

161

Logici modale normale

Fie ML_0 limbajul modal de bază.

Definiția 2.31

O **logică modală normală** este o mulțime Λ de formule din ML_0 care are următoarele proprietăți:

► Λ conține următoarele **axiome**:

(Taut) toate tautologiile propoziționale,

(K) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$,

(Dual) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$,

unde p, q sunt propoziții atomice ale lui ML_0 .

162

Logici modale normale

Definiția 2.31 (continuare)

► Λ este închisă la următoarele reguli de deducție:

► **modus ponens (MP)**:

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Prin urmare, dacă $\varphi \in \Lambda$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Lambda$, atunci $\psi \in \Lambda$.

► **substituția uniformă**:

$$\frac{\varphi}{\theta} \quad \text{unde } \theta \text{ este o instanță de substituție a lui } \varphi$$

Prin urmare, dacă $\varphi \in \Lambda$, atunci $\theta \in \Lambda$.

► **generalizarea**:

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}$$

Prin urmare, dacă $\varphi \in \Lambda$, atunci $\Box\varphi \in \Lambda$.

163

Logici modale normale

Fie Λ o logică modală normală.

Lema 2.32

Λ conține, pentru orice formule φ, ψ ,

(K') $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$,

(Dual') $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$.

Dem.: Fie p, q propoziții atomice. Aplicând (K) și (Dual) obținem că $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \in \Lambda$ și $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p \in \Lambda$. Folosind acum substituția uniformă: $p \mapsto \varphi$, $q \mapsto \psi$, rezultă că $(K') \in \Lambda$ și $(Dual') \in \Lambda$. □

Vom scrie (K) în loc de (K') și (Dual) în loc de (Dual').

164

Adăugăm toate tautologiile propoziționale ca axiome pentru ușurință, dar nu este necesar. Puteam să adăugăm doar un număr mic de tautologii, care le generează pe toate. De exemplu,

- (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
 (A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 (A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi).$

Propoziția 2.33

Orice tautologie propozițională este validă în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0 .

Observație

Tautologiile pot conține și modalități. De exemplu, $\diamond\psi \vee \neg\diamond\psi$ este tautologie, deoarece are aceeași formă cu $\varphi \vee \neg\varphi$.

165

Axioma (K) se mai numește și **axioma distribuției** și este importantă pentru că ne permite să transformăm $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$ într-o implicație $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi$, putând astfel să folosim gândirea propozițională. De exemplu, presupunem că vrem să demonstrăm $\Box\psi$ și avem deja o demonstrație care conține atât $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$ cât și $\Box\varphi$. Atunci aplicând (K) și modus ponens, obținem $\Box\psi$. Aplicând din nou modus ponens, rezultă $\Box\psi$.

Conform Exemplului 2.25,

Propoziția 2.34

(K) este validă în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0 .

166

Axioma (Dual) reflectă dualitatea între \diamond și \Box . Este necesară pentru că în ML_0 operatorul modal primitiv este \diamond și \Box este derivat. Prin urmare, axioma (K) este, în realitate, o abreviere pentru

$$\neg\diamond\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\diamond\neg\varphi \rightarrow \neg\diamond\neg\psi).$$

Dacă am fi considerat \Box ca operator primitiv și am fi definit $\diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$, atunci nu era nevoie să adăugăm (Dual).

Propoziția 2.35

(Dual) este validă în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0 .

Dem.: Exercițiu.

167

Propoziția 2.36

- ▶ **modus ponens păstrează satisfiabilitatea:** pentru orice model \mathcal{M} și stare $w \in \mathcal{M}$,

dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$, atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$.

- ▶ **modus ponens păstrează adevărul global:** pentru orice model \mathcal{M} ,

dacă $\mathcal{M} \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\mathcal{M} \Vdash \varphi$, atunci $\mathcal{M} \Vdash \psi$.

- ▶ **modus ponens păstrează validitatea:** pentru orice cadru \mathcal{F} ,

dacă $\mathcal{F} \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\mathcal{F} \Vdash \varphi$, atunci $\mathcal{F} \Vdash \psi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

168

Propoziția 2.37

Substituția uniformă **păstrează validitatea**: pentru orice cadru \mathcal{F} , dacă θ este o instanță de substituție a lui φ , atunci

$$\mathcal{F} \Vdash \varphi \text{ implică } \mathcal{F} \Vdash \theta.$$

Dem.: Exercițiu.

Observație

Substituția uniformă **NU** păstrează satisfiabilitatea sau adevărul global.

Dem.: De exemplu, $\theta := q$ se obține prin substituție uniformă din $\varphi := p$, dar din faptul că p este global adevărată într-un model \mathcal{M} nu rezultă că q este global adevărată în \mathcal{M} .

Generalizarea "modalizează" formulele, adăugându-le \Box în față. Dacă axioma (K) ne permite să aplicăm raționamente clasice în context modal, generalizarea crează noi contexte modale în care să lucrăm.

Propoziția 2.38

▶ Generalizarea **păstrează adevărul global**: pentru orice model \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} \Vdash \varphi \text{ implică } \mathcal{M} \Vdash \Box\varphi.$$

▶ Generalizarea **păstrează validitatea**: pentru orice cadru \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F} \Vdash \varphi \text{ implică } \mathcal{F} \Vdash \Box\varphi.$$

Dem.: Exercițiu.

Observație

Generalizarea **NU** păstrează satisfiabilitatea.

Teorema 2.39

Pentru orice clasă \mathbf{F} de cadre, logica $\Lambda_{\mathbf{F}}$ a lui \mathbf{F} este o logică modală normală.

Dem.: Se obține imediat din rezultatele anterioare.

Lema 2.40

- ▶ Colecția tuturor formulelor este o logică modală normală, numită **logica inconsistentă**.
- ▶ Dacă $\{\Lambda_i \mid i \in I\}$ este o colecție de logici modale normale, atunci $\bigcap_{i \in I} \Lambda_i$ este o logică modală normală.

Definiția 2.41

\mathbf{K} este intersecția tuturor logicilor modale normale.

Definiția 2.42

O **K-demonstrație** este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- ▶ θ_i este axiomă (adică tautologie, (K) sau (Dual));
- ▶ θ_i se obține din formule anterioare aplicând următoarele reguli de deducție: modus ponens, substituția uniformă sau generalizarea.

Definiția 2.43

Fie φ o formulă. O **K-demonstrație a lui φ** este o **K-demonstrație** $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$.

Dacă φ are o **K-demonstrație**, spunem că φ este **K-demonstrabilă** și scriem $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$.

Exemplul 2.44

Pentru orice $p, q \in PROP$, $\vdash_K \Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$.

Dem.: Prezentăm următoarea K-demonstrație:

- (1) $\vdash_K p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ tautologie
- (2) $\vdash_K \Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$ generalizare: (1)
- (3) $\vdash_K \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ axioma (K)
- (4) $\vdash_K \Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)))$
substituție uniformă: (3), $q \mapsto (q \rightarrow (p \wedge q))$
- (5) $\vdash_K \Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q))$ MP: (2), (4)
- (6) $\vdash_K \Box(q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$
substituție uniformă: (3), $p \mapsto q, q \mapsto (p \wedge q)$
- (7) $\vdash_K \Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$
logică propozițională: (5),(6) și MP,
 $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ tautologie
- (8) $\vdash_K \Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$
logică propozițională: (7) și MP,
 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$ tautologie. \square

Teorema 2.45

$$K = \{\varphi \mid \vdash_K \varphi\}.$$

Logica K este foarte slabă. Dacă suntem interesați de cadre tranzitive, am dori să avem un sistem de demonstrație care reflectă acest lucru. De exemplu, știm că $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ este validă în clasa tuturor cadrelor tranzitive, prin urmare, ar fi de dorit un sistem de demonstrație care generează această formulă.

K nu poate face asta, deoarece $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ nu este validă în clasa tuturor cadrelor.

Ideea este de a extinde K cu axiome adiționale.

Conform Lemei 2.40, pentru orice mulțime de formule Γ , există cea mai mică logică modală normală care conține Γ .

Definiția 2.46

$K\Gamma$ este cea mai mică logică modală normală care conține Γ .

Spunem că $K\Gamma$ este generată de Γ sau că este axiomatizată de Γ .

Definiția 2.47

O KΓ-demonstrație este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- ▶ θ_i este axiomă (adică tautologie, (K) sau (Dual));
- ▶ $\theta_i \in \Gamma$;
- ▶ θ_i se obține din formule anterioare aplicând următoarele reguli de deducție: modus ponens, substituția uniformă sau generalizarea.

Definiția 2.48

Fie φ o formulă. O KΓ-demonstrație a lui φ este o

KΓ-demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$.

Dacă φ are o KΓ-demonstrație, spunem că φ este

KΓ-demonstrabilă și scriem $\vdash_{K\Gamma} \varphi$.

Teorema 2.49

$$K\Gamma = \{\varphi \mid \vdash_{K\Gamma} \varphi\}.$$

Exemplu

De exemplu, dacă extindem K adăugând $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ ca axiomă, obținem logica K4.

În continuare, în limbajul de bază $ML_0 := ML(PROP, \tau_0)$, mulțimea $PROP$ este **numărabilă**. Fie Λ o logică modală normală.

Definiția 2.50

Dacă $\varphi \in \Lambda$, spunem și că φ este **Λ -teoremă** sau **teoremă a lui Λ** și scriem $\vdash_{\Lambda} \varphi$. Dacă $\varphi \notin \Lambda$, scriem $\not\vdash_{\Lambda} \varphi$.

Cu aceste notații, condițiile din definiția unei logici normale se scriu astfel:

Pentru orice formule φ, ψ, θ , au loc următoarele:

- (i) Dacă φ este tautologie, atunci $\vdash_{\Lambda} \varphi$.
- (ii) $\vdash_{\Lambda} (K)$ și $\vdash_{\Lambda} (Dual)$.
- (iii) Dacă $\vdash_{\Lambda} \varphi$ și $\vdash_{\Lambda} \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\vdash_{\Lambda} \psi$.
- (iv) Dacă $\vdash_{\Lambda} \varphi$ și θ este instanță de substituție a lui φ , atunci $\vdash_{\Lambda} \theta$.
- (v) Dacă $\vdash_{\Lambda} \varphi$, atunci $\vdash_{\Lambda} \Box\varphi$.

Definiția 2.51

Fie $\psi_1, \dots, \psi_n, \varphi$ formule în ML_0 . Spunem că φ este **deductibilă în logica propozițională din asumpțiile ψ_1, \dots, ψ_n** dacă

$$(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi \text{ este tautologie.}$$

Propoziția 2.52

Λ este **închisă la deducția propozițională**: dacă φ este **deductibilă în logica propozițională din asumpțiile ψ_1, \dots, ψ_n** , atunci

$$\vdash_{\Lambda} \psi_1, \dots, \vdash_{\Lambda} \psi_n \text{ implică } \vdash_{\Lambda} \varphi.$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.53

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\}$ o mulțime de formule în ML_0 . Spunem că φ este **deductibilă în Λ din Γ** sau că φ este **Λ -deductibilă din Γ** dacă există formule $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$ ($n \geq 0$) a.î.

$$\vdash_{\Lambda} (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi.$$

(În cazul $n = 0$, aceasta înseamnă că $\vdash_{\Lambda} \varphi$).

Notație: $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$.

Scriem $\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \varphi$ dacă φ nu este Λ -deductibilă din Γ .

Observație

Următoarele sunt echivalente:

- (i) $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$.
- (ii) există formule $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$ ($n \geq 0$) a.î.

$$\vdash_{\Lambda} \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi)).$$

Dem.: (i) \Rightarrow (ii)

- (1) $\vdash_{\Lambda} (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$ (i)
- (2) $\vdash_{\Lambda} ((\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi)))$
tautologie
- (3) $\vdash_{\Lambda} \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi))$ (MP): (1),(2).

(ii) \Rightarrow (i)

- (1) $\vdash_{\Lambda} \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi))$ (ii)
- (2) $\vdash_{\Lambda} (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi))) \rightarrow ((\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi)$
tautologie
- (3) $\vdash_{\Lambda} (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$ (MP): (1),(2). □

Propoziția 2.54 (Proprietăți imediate)

Fie φ o formulă și Γ, Δ mulțimi de formule.

- (i) $\emptyset \vdash_{\Lambda} \varphi$ ddacă $\vdash_{\Lambda} \varphi$.
- (ii) $\vdash_{\Lambda} \varphi$ implică $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$.
- (iii) $\varphi \in \Gamma$ implică $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$.
- (iv) Dacă $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ și $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $\Delta \vdash_{\Lambda} \varphi$.
- (v) $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ ddacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash_{\Lambda} \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.55

- (i) Dacă $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ și ψ este deductibilă în logica propozițională din φ , atunci $\Gamma \vdash_{\Lambda} \psi$.
- (ii) Dacă $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ și $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash_{\Lambda} \psi$.
- (iii) Dacă $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ și $\{\varphi\} \vdash_{\Lambda} \psi$, atunci $\Gamma \vdash_{\Lambda} \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.56 (Teorema deducției)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi \rightarrow \psi \quad \text{ddacă} \quad \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\Lambda} \psi.$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.57

O mulțime de formule Γ se numește **Λ -consistentă** dacă $\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \perp$. Dacă Γ nu este Λ -consistentă, spunem că Γ este **Λ -inconsistentă**. O formulă φ este Λ -consistentă dacă $\{\varphi\}$ este; altfel se numește Λ -inconsistentă.

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- (i) Dacă Δ este Λ -consistentă, atunci și Γ este Λ -consistentă.
- (ii) Dacă Γ este Λ -inconsistentă, atunci și Δ este Λ -inconsistentă.

Propoziția 2.58

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

- (i) Γ este Λ -inconsistentă.
- (ii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash_{\Lambda} \psi$ și $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg\psi$.
- (iii) $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ pentru orice formulă φ .

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.59

- (i) $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este Λ -inconsistentă.
- (ii) $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este Λ -inconsistentă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.60

Γ este Λ -consistentă ddacă orice submulțime finită a lui Γ este Λ -consistentă.

În continuare, când Λ este clară din context, spunem simplu “teoreme”, “deductibilă”, “consistentă” sau “inconsistentă” și scriem $\vdash \varphi$, $\Gamma \vdash \varphi$, ...

De asemenea, vom spune “logică normală” în loc de “logică modală normală”.

Fie \mathbf{S} o clasă de **structuri** (cadre sau modele) pentru ML_0 .

Notăție:

$$\Lambda_{\mathbf{S}} := \{\varphi \mid \mathcal{S} \Vdash \varphi \text{ pentru orice structură } \mathcal{S} \text{ din } \mathbf{S}\}.$$

Definiția 2.61

O logică normală Λ este **corectă (sound)** cu privire la \mathbf{S} dacă $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathbf{S}}$.

Așadar, Λ este corectă cu privire la \mathbf{S} ddacă pentru orice formulă φ și pentru orice structură \mathcal{S} din \mathbf{S} ,

$$\vdash_{\Lambda} \varphi \text{ implică } \mathcal{S} \Vdash \varphi.$$

Dacă Λ este corectă cu privire la \mathbf{S} , spunem și că \mathbf{S} este o **clasă de cadre (sau modele)** pentru Λ .

Teorema 2.62 (Teorema de corectitudine pentru \mathbf{K})

\mathbf{K} este **corectă** cu privire la clasa tuturor cadrelor.

Dem.: Aplicăm Teorema 2.39 și faptul că \mathbf{K} este cea mai mică logică normală. \square .

Fie \mathbf{S} o clasă de **structuri** (cadre sau modele) pentru ML_0 .

Definiția 2.63

O logică normală Λ este

▶ **tare completă (strongly complete)** cu privire la \mathbf{S} dacă pentru orice mulțime de formule $\Gamma \cup \{\varphi\}$,

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{S}} \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi.$$

▶ **(slab) completă (weakly complete)** cu privire la \mathbf{S} dacă pentru orice formulă φ ,

$$\mathbf{S} \Vdash \varphi \text{ implică } \vdash_{\Lambda} \varphi.$$

Λ este tare (slab) completă cu privire la o singură structură \mathcal{S} dacă este tare (slab) completă cu privire la clasa $\mathbf{S} := \{\mathcal{S}\}$.

Scriem, de obicei, “completă” în loc de “slab completă”.

Evident, completitudinea este un caz particular al completitudinii tari, în care $\Gamma = \emptyset$. Prin urmare, completitudinea tare cu privire la o clasă de cadre implică completitudinea cu privire la acea clasă. Reciproca **nu** este adevărată.

Observație

Λ este completă cu privire la \mathbf{S} ddacă $\Lambda_{\mathbf{S}} \subseteq \Lambda$.

Așadar, dacă demonstrăm că o logică normală Λ (specificată sintactic) este atât corectă cât și completă cu privire la o clasă de cadre \mathbf{S} , obținem o potrivire perfectă între perspectiva sintactică și cea semantică: $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{S}}$.

Fiind dată o logică normală $\Lambda_{\mathbf{S}}$ (specificată semantic), o problemă foarte importantă este găsirea unei mulțimi cât mai simple de formule Γ astfel încât $\Lambda_{\mathbf{S}}$ este logica generată de Γ (spunem și că Γ **axiomatizează** $\Lambda_{\mathbf{S}}$).

189

Fie \mathbf{S} o clasă de structuri pentru ML_0 și Λ o logică normală.

Propoziția 2.64

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Λ este tare completă cu privire la \mathbf{S} .
- (ii) Orice mulțime de formule Λ -consistentă este satisfiabilă într-un model \mathcal{M} din \mathbf{S} .

Dem.: (i) \Rightarrow (ii) Fie Γ o mulțime Λ -consistentă. Presupunem că Γ nu este satisfiabilă într-un model \mathcal{M} din \mathbf{S} , deci nu există un model \mathcal{M} din \mathbf{S} și o stare $w \in \mathcal{M}$, a.î. $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$. Atunci $\Gamma \Vdash_{\mathbf{S}} \perp$. Deoarece Λ este tare completă cu privire la \mathbf{S} , rezultă că $\Gamma \vdash_{\Lambda} \perp$. Am obținut că Γ este Λ -inconsistentă, o contradicție.

190

(ii) \Rightarrow (i) Fie $\Gamma \cup \{\varphi\}$ o mulțime de formule a.î. $\Gamma \Vdash_{\mathbf{S}} \varphi$. Se observă imediat că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este satisfiabilă în niciun model din \mathbf{S} (pentru orice model \mathcal{M} din \mathbf{S} și orice stare w din \mathcal{M} , dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$, atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$, deci $\mathcal{M}, w \not\Vdash \neg\varphi$). Rezultă din (ii) că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este Λ -inconsistentă. Aplicăm Propoziția 2.59 pentru a concludă că $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$. \square

Corolar 2.65

Λ este slab completă cu privire la \mathbf{S} ddacă orice formulă Λ -consistentă este satisfiabilă într-un model \mathcal{M} din \mathbf{S} .

Dem.: Exercițiu.

191

Mesajul Propoziției 2.64 este: teoremele de completitudine sunt teoreme de existență de modele. Demonstrăm completitudinea tare a unei logici normale Λ cu privire la o clasă de structuri arătând că orice mulțime de formule Λ -consistentă are un model în acea clasă. Prin urmare, întrebarea fundamentală este:

cum construim modelele potrivite?

În continuare dăm un răspuns la această întrebare:

construim modele folosind **mulțimi maximal consistente**, mai precis **modele canonice**.

192

Fie Λ o logică normală.

Definiția 2.66

O mulțime de formule Γ se numește **maximal Λ -consistentă** dacă Γ este Λ -consistentă și pentru orice mulțime de formule Δ ,

dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ și Δ este Λ -consistentă, atunci $\Delta = \Gamma$.

Notație:

Scrim **Λ -MCS** în loc de “maximal Λ -consistentă”. Când Λ este clară din context, scriem simplu **MCS**.

Propoziția 2.67

Fie Γ o mulțime Λ -consistentă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este Λ -MCS.
- (ii) Pentru orice formulă φ , dacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este Λ -consistentă, atunci $\varphi \in \Gamma$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.68

Mulțime $\text{Form}(ML_0)$ a formulelor lui ML_0 este numărabilă.

Propoziția 2.69 (Lema lui Lindenbaum)

Dacă Γ este o mulțime de formule Λ -consistentă, atunci există o Λ -MCS Γ^+ astfel încât $\Gamma \subseteq \Gamma^+$.

Dem.: Fie $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ o enumerare a formulelor lui ML_0 . Definim inductiv următorul șir de mulțimi:

$$\Gamma_0 = \Gamma,$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{dacă } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ este consistentă} \\ \Gamma_n & \text{altfel} \end{cases}$$

Prin construcție, $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \Gamma_n \subseteq \dots$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, Γ_n este consistentă. Fie

$$\Gamma^+ = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n.$$

Afirmația 1: Γ^+ este consistentă.

Demonstrația afirmației Presupunem că Γ^+ nu este consistentă. Conform Propoziției 2.60, Γ^+ are o submulțime finită inconsistentă $\Delta = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$. Pentru orice $i = 1, \dots, k$ exista $N_i \in \mathbb{N}$ a.î. $\psi_i \in \Gamma_{N_i}$. Fie $N := \max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$. Atunci $\Delta \subseteq \Gamma_N$, prin urmare Γ_N este inconsistentă. Am obținut o contradicție.

Afirmația 2: Γ^+ este MCS.

Demonstrația afirmației Fie ψ o formulă a.î. $\Gamma^+ \cup \{\psi\}$ este consistentă. Fie r cel mai mic indice cu $\varphi_r = \psi$. Atunci $\Gamma_r \cup \{\psi\}$ este consistentă, deoarece $\Gamma_r \cup \{\psi\} = \Gamma_r \cup \{\varphi_r\} \subseteq \Gamma^+ \cup \{\varphi_r\} = \Gamma^+ \cup \{\psi\}$. Prin urmare, $\Gamma_{r+1} = \Gamma_r \cup \{\psi\}$. Rezultă că $\psi \in \Gamma_{r+1} \subseteq \Gamma^+$. □

Propoziția 2.70

Fie Γ o Λ -MCS.

- (i) Γ este închisă la modus ponens: dacă $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, atunci $\psi \in \Gamma$.
- (ii) $\Lambda \subseteq \Gamma$.
- (iii) Pentru orice formulă φ , exact una din următoarele are loc: $\varphi \in \Gamma$ sau $\neg\varphi \in \Gamma$ (echivalent, $\varphi \in \Gamma$ ddacă $\neg\varphi \notin \Gamma$).
- (iv) Pentru orice formulă φ ,

$$\varphi \in \Gamma \text{ ddacă } \Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi.$$
- (v) Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma \text{ ddacă } (\varphi \in \Gamma \text{ implică } \psi \in \Gamma).$$

Dem.: Exercițiu.

Suntem acum pregătiți să construim modele cu ajutorul MCS și, în particular, să definim modelul special numit **model canonic**. Cu ajutorul acestor structuri, vom demonstra **Teorema Modelului Canonic**, un rezultat esențial pentru a obține completitudinea logicilor normale.

Într-o formă sau alta, un astfel de rezultat stă la baza majorității rezultatelor de completitudine modală.

Fie Λ o logică normală.

Definiția 2.71

Modelul canonic al lui Λ este tripletul $\mathcal{M}^{\Lambda} = (W^{\Lambda}, R^{\Lambda}, V^{\Lambda})$, unde

- ▶ W^{Λ} este mulțimea tuturor Λ -MCS;
- ▶ R^{Λ} este relația binară pe W^{Λ} definită astfel: pentru orice $w, v \in W^{\Lambda}$, $R^{\Lambda}wv$ ddacă pentru orice formulă φ ,

$$\varphi \in v \text{ implică } \diamond\varphi \in w.$$

R^{Λ} se numește **relația canonică**.

- ▶ V^{Λ} este evaluarea definită astfel:

$$V^{\Lambda}(p) = \{w \in W^{\Lambda} \mid p \in w\}.$$

V^{Λ} se numește **evaluarea canonică**.

Perechea $\mathcal{F}^{\Lambda} = (W^{\Lambda}, R^{\Lambda})$ se numește **cadru canonic** pentru Λ .

Propoziția 2.72 (Lema existenței)

Fie $w \in W^{\Lambda}$. Dacă φ este o formulă care satisface $\diamond\varphi \in w$, atunci există o stare $v \in W^{\Lambda}$ a.î. $R^{\Lambda}wv$ și $\varphi \in v$.

Conform definiției modelului canonic, pentru orice propoziție atomică p , avem că p este adevărată într-un punct w din M^{Λ} ddacă $p \in w$. Lema adevărului extinde această ecuație "adevăr=apartenență" la formule arbitrare.

Propoziția 2.73 (Lema adevărului)

Fie $w \in W^{\Lambda}$. Pentru orice formulă φ ,

$$\mathcal{M}^{\Lambda}, w \Vdash \varphi \text{ ddacă } \varphi \in w.$$

Dem.: Prin inducție după φ .

- ▶ $\varphi = p \in PROP$. Atunci $\mathcal{M}^{\Lambda}, w \Vdash p$ ddacă $w \in V^{\Lambda}(p)$ ddacă $\varphi \in w$.

- ▶ $\varphi = \perp$. Evident, deoarece $\mathcal{M}^\Lambda, w \not\models \perp$ și $\perp \notin w$.
- ▶ $\varphi = \neg\psi$. Obținem că $\mathcal{M}^\Lambda, w \models \neg\psi$ ddacă $\mathcal{M}^\Lambda, w \not\models \psi$ ddacă $\psi \notin w$ (din ipoteza de inducție pentru ψ) ddacă $\neg\psi \in w$ (conform Propoziției 2.70.(iii)).
- ▶ $\varphi = \psi \rightarrow \chi$. Obținem că $\mathcal{M}^\Lambda, w \models \psi \rightarrow \chi$ ddacă $(\mathcal{M}^\Lambda, w \models \psi$ implică $\mathcal{M}^\Lambda, w \models \chi)$ ddacă $(\psi \in w$ implică $\chi \in w)$ (din ipoteza de inducție pentru ψ, χ) ddacă $\psi \rightarrow \chi \in w$ (conform Propoziției 2.70.(iv)).

- ▶ $\varphi = \Diamond\psi$.
 \Rightarrow Presupunem că $\mathcal{M}^\Lambda, w \models \Diamond\psi$. Aplicând definiția satisfacerii și ipoteza de inducție pentru ψ , rezultă că există $v \in W^\Lambda$ a.î. $R^\Lambda wv$ și $\psi \in v$.
 Conform definiției lui R^Λ , rezultă că $\Diamond\psi \in w$.
 \Leftarrow Presupunem că $\Diamond\psi \in w$. Aplicând Lema existenței, rezultă că există $v \in W^\Lambda$ a.î. $R^\Lambda wv$ și $\psi \in v$. Conform ipotezei de inducție pentru ψ , obținem că există $v \in W^\Lambda$ a.î. $R^\Lambda wv$ și $\mathcal{M}^\Lambda, v \models \psi$. Prin urmare, $\mathcal{M}^\Lambda, w \models \Diamond\psi$. □

Teorema 2.74 (Teorema modelului canonic - versiunea 1)

Orice mulțime Λ -consistentă este satisfiabilă în modelul canonic \mathcal{M}^Λ al lui Λ .

Dem.: Fie Γ o mulțime Λ -consistentă. Conform Lemei lui Lindenbaum, există $w \in W^\Lambda$ a.î. $\Gamma \subseteq w$. Din Lema adevărului rezultă că pentru orice $\varphi \in \Gamma$ avem că $\mathcal{M}^\Lambda, w \models \varphi$. Așadar, $\mathcal{M}^\Lambda, w \models \Gamma$. □

Aplicând Propoziția 2.64, rezultă

Teorema 2.75 (Teorema modelului canonic - versiunea 2)

Orice logică normală Λ este tare completă cu privire la modelul său canonic \mathcal{M}^Λ .

Rezultatele de mai sus stau la baza obținerii de teoreme de completitudine pentru diverse logici normale cu privire la diverse clase de cadre.

Teorema 2.76

\mathbf{K} este tare completă cu privire la clasa tuturor cadrelor pentru ML_0 .

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.64. Fie Γ o mulțime \mathbf{K} -consistentă de formule. Trebuie să găsim un model \mathcal{M} în care Γ este satisfiabilă. Conform Teoremei 2.74, putem lua $\mathcal{M} := \mathcal{M}^\mathbf{K}$, modelul canonic al lui \mathbf{K} . □

Teorema 2.77

\mathbf{K} este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor pentru ML_0 .

Dem.: Aplicăm teorema precedentă și Teorema 2.62. □

Fie

$$(4) \quad \Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p.$$

Vom folosi notația **K4** pentru logică modală normală generată de (4). Prin urmare, **K4** este cea mai mică logică modală normală care conține (4).

Modelul canonic al logicii **K4** este $\mathcal{M}^{\mathbf{K4}} = (W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}}, V^{\mathbf{K4}})$ și cadrul canonic este $\mathcal{F}^{\mathbf{K4}} = (W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}})$.

Din Teorema 2.74 rezultă

Propoziția 2.78

Orice mulțime **K4**-consistentă este satisfiabilă în modelul canonic $\mathcal{M}^{\mathbf{K4}}$.

Propoziția 2.79

Cadrul canonic $\mathcal{F}^{\mathbf{K4}} = (W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}})$ este tranzitiv.

Dem.: Fie $w, v, u \in W^{\mathbf{K4}}$ a.î $R^{\mathbf{K4}} wv$ și $R^{\mathbf{K4}} vu$. Trebuie să arătăm că $R^{\mathbf{K4}} wu$, adică

pentru orice formulă $\varphi, \varphi \in u$ implică $\Diamond\varphi \in w$.

Fie $\varphi \in u$ o formulă. Deoarece $R^{\mathbf{K4}} vu$, rezultă că $\Diamond\varphi \in v$. Deoarece $R^{\mathbf{K4}} wv$, rezultă că $\Diamond\Diamond\varphi \in w$. Cum w este o **K4**-MCS, avem, conform Propoziției 2.70.(ii), că **K4** $\subseteq w$. În particular, $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi \in w$. Aplicăm acum modus ponens (Propoziția 2.70.(i)) pentru a conclud că $\Diamond\varphi \in w$. □

Observație

Putem obține, adaptând demonstrația de mai sus, un rezultat mai general, și anume: cadrul canonic al oricărei logici normale care conține (4) este tranzitiv.

Teorema 2.80

K4 este tare completă cu privire la Tran, clasa tuturor cadrelor tranzitive pentru ML_0 .

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.64. Fie Γ o mulțime **K4**-consistentă de formule. Conform Teoremei 2.74, Γ este satisfiabilă în $\mathcal{M}^{\mathbf{K4}}$. Aplicând Propoziția 2.79, obținem că $\mathcal{F}^{\mathbf{K4}} \in Tran$. □

Teorema 2.81

$$\mathbf{K4} = \Lambda_{Tran}.$$

Dem.: " \subseteq " Din Teorema 2.39 și Exemplit 2.28 obținem că Λ_{Tran} este o logică normală care conține (4). Prin urmare, **K4** $\subseteq \Lambda_{Tran}$. " \supseteq " Rezultă imediat din Teorema 2.80 că **K4** este completă cu privire la Tran. Deci, **K4** $\supseteq \Lambda_{Tran}$. □

Prin urmare, **K4** este corectă și completă cu privire la Tran.

Fie

$$(T) \quad p \rightarrow \Diamond p.$$

Vom folosi notația **T** pentru logică normală generată de (T).

Definiția 2.82

Spunem că un cadru $\mathcal{F} = (W, R)$ pentru ML_0 este **reflexiv** dacă R este reflexivă.

Propoziția 2.83

(T) este validă în clasa tuturor cadrelor reflexive.

Dem.: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru reflexiv, w o stare din \mathcal{F} și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe \mathcal{F} . Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash p$. Deoarece R este reflexivă, rezultă că Rww și $\mathcal{M}, w \Vdash p$. Deci, $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$. □

Modelul canonic al logicii \mathbf{T} este $\mathcal{M}^{\mathbf{T}} = (W^{\mathbf{T}}, R^{\mathbf{T}}, V^{\mathbf{T}})$ și cadrul canonic este $\mathcal{F}^{\mathbf{T}} = (W^{\mathbf{T}}, R^{\mathbf{T}})$.

Din Teorema 2.74 rezultă

Propoziția 2.84

Orice mulțime \mathbf{T} -consistentă este satisfiabilă în modelul canonic $\mathcal{M}^{\mathbf{T}}$.

Propoziția 2.85

Cadrul canonic $\mathcal{F}^{\mathbf{T}} = (W^{\mathbf{T}}, R^{\mathbf{T}})$ este reflexiv.

Dem.: Fie $w \in W^{\mathbf{T}}$. Trebuie să arătăm că $R^{\mathbf{T}}ww$, adică
pentru orice formulă φ , $\varphi \in w$ implică $\diamond\varphi \in w$.

Fie $\varphi \in w$ o formulă. Deoarece w este o \mathbf{T} -MCS, avem, conform Propoziției 2.70.(ii), că $\mathbf{T} \subseteq w$. În particular $\varphi \rightarrow \diamond\varphi \in w$. Aplicăm acum modus ponens (Propoziția 2.70.(i)) pentru a conclud că $\diamond\varphi \in w$. □.

Teorema 2.86

\mathbf{T} este tare completă cu privire la clasa tuturor cadrelor reflexive pentru ML_0 .

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.64. Fie Γ o mulțime \mathbf{T} -consistentă de formule. Conform Teoremei 2.74, Γ este satisfiabilă în $\mathcal{M}^{\mathbf{T}}$. Aplicăm acum Propoziția 2.85. □

Teorema 2.87

\mathbf{T} este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor reflexive pentru ML_0 .

Dem.: Aplicăm teorema precedentă și Propoziția 2.83.