LOGICA DE ORDINUL I

Definiția 1.1

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;*
- *paranteze: (,);*
- *simbolul de egalitate $=$;*
- *cuantificatorul universal $\forall$;*
- *o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;*
- *o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;*
- *o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;*
- *o funcție aritate $ari : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.*

- $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathrm{ari})$.
- τ se numește signatura lui $\mathcal{L}$ sau vocabularul lui $\mathcal{L}$ sau alfabetul lui $\mathcal{L}$ sau tipul de similaritate al lui $\mathcal{L}$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc simboluri non-logice.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc simboluri logice.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \ldots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R \ldots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \ldots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \ldots$.

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m$:= mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m;

$\mathcal{R}_m$:= mulțimea simbolurilor de relații de aritate m.

Definiția 1.2

Mulțimea $Expr_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ.

Definiția 1.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in Sim_{\mathcal{L}}$ pentru orice i.

- *Dacă $0 \le i \le j \le k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i,j)-subexpresia lui θ;*
- *Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \le i \le j \le k-1$ a.î. ψ este (i,j)-subexpresia lui θ;*
- *Notăm cu $Var(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ.*

Termeni

Definiția 1.4

Mulțimea $Trm_{\mathcal{L}}$ *a termenilor lui* $\mathcal{L}$ *este intersecția tuturor mulțimilor de expresii* Γ *care satisfac următoarele proprietăți:*

- *orice variabilă este element al lui* Γ*;*
- *orice simbol de constantă este element al lui* Γ*;*
- *dacă* $m \geq 1$*,* $f \in \mathcal{F}_m$ *și* $t_1, \ldots, t_m \in \Gamma$*, atunci* $ft_1 \ldots t_m \in \Gamma$*.*

Notații:

- Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \ldots$.
- $Var(t)$ este mulțimea variabilelor care apar în termenul t.
- Scriem $t(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile și $Var(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definiția 1.5

Un termen t *se numește închis dacă* $Var(t) = \emptyset$*.*

Termeni

Propoziția 1.6 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- *Γ conține variabilele și simbolurile de constante;*
- *dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \ldots t_m \in \Gamma$.*

Atunci $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Formule

Definiția 1.7

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- $(s = t)$, *unde* s, t *sunt termeni;*
- $(Rt_1 \ldots t_m)$, *unde* $R \in \mathcal{R}_m$ *și* $t_1, \ldots, t_m$ *sunt termeni.*

Definiția 1.8

Mulțimea $Form_{\mathcal{L}}$ a formulelor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- *orice formulă atomică este element al lui* Γ*;*
- Γ *este închisă la* $\neg$*: dacă* $\varphi \in \Gamma$*, atunci* $(\neg\varphi) \in \Gamma$*;*
- Γ *este închisă la* $\rightarrow$*: dacă* $\varphi, \psi \in \Gamma$*, atunci* $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$*;*
- Γ *este închisă la* $\forall x$ *(pentru orice variabilă* x*): dacă* $\varphi \in \Gamma$*, atunci* $(\forall x\varphi) \in \Gamma$ *pentru orice variabilă* x*.*

Formule

Notații

- Formule: $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
- $Var(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula φ.

Convenție

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \ldots t_m$ în loc de $(Rt_1 \ldots t_m)$, $\forall x\varphi$ în loc de $(\forall x\varphi)$, etc..

Formule

Propoziția 1.9 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- Γ *conține toate formulele atomice;*
- Γ *este închisă la $\neg, \rightarrow$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).*

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Conectori derivați

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și cuantificatorul existențial $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$
\begin{aligned}
\varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\
\varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))) \\
\varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\
\exists x\varphi &:= (\neg\forall x(\neg\varphi)).
\end{aligned}
$$

Formule

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedență mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.
- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- Așadar, $\forall x\varphi \to \psi$ este $(\forall x\varphi) \to \psi$ și nu $\forall x(\varphi \to \psi)$.

Notații

De multe ori identificăm un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- Scriem de multe ori $f(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $ft_1 \ldots t_m$ și $R(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \ldots t_m$.
- Pentru simboluri f de operații binare scriem $t_1 f t_2$ în loc de $ft_1 t_2$.
- Analog pentru simboluri R de relații binare: scriem $t_1 R t_2$ în loc de $Rt_1 t_2$.

Definiția 1.10

O $\mathcal{L}$-structură este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- *A este o mulțime nevidă;*
- *$\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea m, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$;*
- *$\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea m, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;*
- *$\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.*
- *A se numește universul structurii $\mathcal{A}$. Notație: $A = |\mathcal{A}|$*
- *$f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește denotația sau interpretarea lui f (respectiv R, c) în $\mathcal{A}$.*

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \to y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \land \neg(y = z) \land \neg(z = x))$$

Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$-structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} =<, \ \dot{+}^{\mathcal{N}} = +, \ \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot, \ \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \ \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}$-structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

- Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\dot{\leq}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $\dot{<}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\dot{\in}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

SEMANTICA

Interpretare (evaluare)

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

Definiția 1.11

O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \to A$.

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

Definiția 1.12 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e:

- *dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;*
- *dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;*
- *dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.*

Interpretarea formulelor

Prin inducție pe formule se definește interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a *formulei* φ *sub evaluarea* e.

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Negația și implicația

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$$\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\},$$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \big(\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1\big)$.

Notație

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretarea $e_{x \leftarrow a} : V \to A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Relația de satisfacere

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 1.13

Fie φ o formulă. Spunem că:

- *e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.*
- *e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.*

Corolar 1.14

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *implică* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e] \iff$ *pentru orice* $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

$\vee, \wedge, \leftrightarrow: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 1.15

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

Relația de satisfacere

$$
\begin{aligned}
(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \quad &\iff \quad (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\
&\iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 0 \\
&\iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1.
\end{aligned}
$$

Corolar 1.16

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *și* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *ddacă* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ *există* $a \in A$ *a.î.* $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

Semantică

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.17

Spunem că φ este *satisfiabilă* *dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.*

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un *model* *al lui φ.*

Atenție! Este posibil ca atât φ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.
Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.18

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 1.19

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.20

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \mathrel{=\!\!|\!\!\vDash} \psi$

Definiția 1.21

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \mathrel{=\!\!|\!\!\vDash} \psi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Echivalențe și consecințe logice

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$\neg\exists x\varphi \;\;\mathrel{\models\!\!\!\dashv}\;\; \forall x\neg\varphi \tag{1}$$

$$\neg\forall x\varphi \;\;\mathrel{\models\!\!\!\dashv}\;\; \exists x\neg\varphi \tag{2}$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \;\;\mathrel{\models\!\!\!\dashv}\;\; \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \tag{3}$$

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \;\;\models\;\; \forall x(\varphi \vee \psi) \tag{4}$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \;\;\models\;\; \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \tag{5}$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \;\;\mathrel{\models\!\!\!\dashv}\;\; \exists x\varphi \vee \exists x\psi \tag{6}$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \;\;\models\;\; \forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi \tag{7}$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \;\;\models\;\; \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi \tag{8}$$

$$\forall x\varphi \;\;\models\;\; \exists x\varphi \tag{9}$$

$$\begin{align} \varphi &\vDash \exists x\varphi \tag{10}\\ \forall x\varphi &\vDash \varphi \tag{11}\\ \forall x\forall y\varphi &\mathrel{=}\!\mathrel{|}\!\mathrel{=} \forall y\forall x\varphi \tag{12}\\ \exists x\exists y\varphi &\mathrel{=}\!\mathrel{|}\!\mathrel{=} \exists y\exists x\varphi \tag{13}\\ \exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. \tag{14} \end{align}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.22

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \to t = s$;

(iii) $\vDash s = t \wedge t = u \to s = u$.

Dem.: *Exercițiu ușor.*

Propoziția 1.23

Pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m, R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $t_i, u_i, i = 1, \ldots, m$,

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m \quad (15)$$

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m) \quad (16)$$

Dem.: Arătăm (15). Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare a.î. $\mathcal{A} \models ((t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m))[e]$. Atunci $\mathcal{A} \models (t_i = u_i)[e]$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$, deci $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Rezultă că

$$\begin{aligned} (ft_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \ldots u_m)^{\mathcal{A}}(e) \end{aligned}$$

Așadar, $\mathcal{A} \models (ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m)[e]$. $\square$

Variabile legate și libere

Definiția 1.24

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- *spunem că variabila x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. (i,j)-subexpresia lui φ este o subexpresie a lui φ de forma $\forall x \psi$;*
- *spunem că x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ;*
- *x este variabilă legată (*bounded variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ;*
- *x este variabilă liberă (*free variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ.*

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \to x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Variabile legate și libere

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$
\begin{array}{lcll}
FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\
FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi); & \\
FV(\varphi \to \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi); & \\
FV(\forall x \varphi) & = & FV(\varphi) \setminus \{x\}. &
\end{array}
$$

Notație: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propoziția 1.25

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.26

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in FV(\varphi), \text{ atunci}$$
$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi), Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$, deci putem aplica Propoziția 1.25 pentru a conclude că

$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = Rt_1 \ldots t_m$.

Atunci $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$, deci putem aplica Propoziția 1.25 pentru a conclude că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, m.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) \\ &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$.

Deoarece $FV(\psi) = FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a conclude că

$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_2].$$

Rezultă

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Interpretarea formulelor

- $\varphi = \psi \to \chi$.

Deoarece $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a conclude că

$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \chi[e_2].$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$ și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$$e_{1x \leftarrow a}(v) = e_{2x \leftarrow a}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1x \leftarrow a}, e_{2x \leftarrow a}$ pentru a conclude că

$$\text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x \leftarrow a}].$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x \leftarrow a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x \leftarrow a}] \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

$\square$

Propoziția 1.27

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \vDash\Dashv \exists x\varphi \tag{17}$$

$$\varphi \vDash\Dashv \forall x\varphi \tag{18}$$

$$\forall x(\varphi \land \psi) \vDash\Dashv \varphi \land \forall x\psi \tag{19}$$

$$\forall x(\varphi \lor \psi) \vDash\Dashv \varphi \lor \forall x\psi \tag{20}$$

$$\exists x(\varphi \land \psi) \vDash\Dashv \varphi \land \exists x\psi \tag{21}$$

$$\exists x(\varphi \lor \psi) \vDash\Dashv \varphi \lor \exists x\psi \tag{22}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \vDash\Dashv \varphi \to \forall x\psi \tag{23}$$

$$\exists x(\varphi \to \psi) \vDash\Dashv \varphi \to \exists x\psi \tag{24}$$

$$\forall x(\psi \to \varphi) \vDash\Dashv \exists x\psi \to \varphi \tag{25}$$

$$\exists x(\psi \to \varphi) \vDash\Dashv \forall x\psi \to \varphi \tag{26}$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 1.28

O formulă φ se numește enunț (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.
Notație: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 1.29

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 1.26 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. $\square$

Definiția 1.30

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este un model al lui φ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \to A$. Notație: $\mathcal{A} \models \varphi$

Mulțimi de formule

Fie φ formulă lui $\mathcal{L}$ și Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.31

Spunem că Γ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui Γ.

Definiția 1.32

Spunem că φ este consecință semantică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$(\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \Gamma \implies (\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \varphi.$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Fie φ enunț al lui $\mathcal{L}$ și Γ o mulțime de enunțuri.

Definiția 1.33

Spunem că Γ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ este un model al lui Γ. *Notație:* $\mathcal{A} \vDash \Gamma$

Definiția 1.34

Spunem că φ este consecință semantică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \implies \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Tautologii

Noțiunile de tautologie și consecință tautologică din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectivelor $\neg, \rightarrow$.

Propoziția 1.35

O $\mathcal{L}$-evaluare (de adevăr) este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ,

- $F(\neg\varphi) = 1 - F(\varphi)$;
- $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 1.36

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e,\mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$-evaluare.

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 1.37

Fie φ o formulă și Γ o mulțime de formule.

- φ *este* *tautologie* *dacă* $F(\varphi) = 1$ *pentru orice* $\mathcal{L}$*-evaluare* F.
- φ *este* *consecință tautologică* *a lui* Γ *dacă pentru orice* $\mathcal{L}$*-evaluare de adevăr* F,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad F(\varphi) = 1.$$

Exemple de tautologii: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$, etc..

Propoziția 1.38

Fie φ o formulă și Γ o mulțime de formule.

(i) *Dacă φ este tautologie, atunci φ este validă.*

(ii) *Dacă φ este consecință tautologică a lui Γ, atunci $\Gamma \vDash \varphi$.*

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen

(i) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$-evaluare, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.

(ii) Fie $(\mathcal{A}, e)$ un model al lui Γ. Atunci $\gamma^{\mathcal{A}}(e) = 1$, deci $V_{e,\mathcal{A}}(\gamma) = 1$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Deoarece φ este consecință tautologică a lui Γ, rezultă că $V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, deci $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. $\square$

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu e tautologie.

Substituția

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.39

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim

$t_x(u)$ $:=$ *expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u.*

Propoziția 1.40

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după termenul t.

- $t = y \in V$. Atunci $y_x(u) = \begin{cases} y & \text{dacă } y \neq x \\ u & \text{dacă } y = x. \end{cases}$
- $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $c_x(u) = c$.
- $t = ft_1 \ldots t_m$ și, conform ipotezei de inducție, $(t_1)_x(u), \ldots, (t_m)_x(u)$ sunt termeni. Atunci $(ft_1 \ldots t_m)_x(u) = f(t_1)_x(u) \ldots (t_m)_x(u)$ este termen. $\square$

Substituția

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$. Avem

- Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

Substituția

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 1.41

Spunem că x este liberă pentru u în φ sau că u este substituibil pentru x în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u, nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y \psi$ nu conține apariții libere ale lui x.

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- u nu conține variabile;
- φ nu conține variabile care apar în u;
- nici o variabilă din u nu apare legată în φ;
- x nu apare în φ;
- φ nu conține apariții libere ale lui x.

Substituția

Definiție alternativă

Noțiunea "x este liberă pentru u în φ" poate fi definită și prin inducție după formula φ astfel:

- dacă φ este formulă atomică, atunci x este liberă pentru u în φ;
- dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă x este liberă pentru u în ψ;
- dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă x este liberă pentru u atât în ψ cât și în χ;
- dacă $\varphi = \forall y \psi$, atunci x este liberă pentru u în φ ddacă
    - x nu apare liberă în φ, sau
    - y nu apare în u și x este liberă pentru u în ψ.

Substituția

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ.

Definiția 1.42

$\varphi_x(u)$:= *expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.*

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o substituție liberă.

Propoziția 1.43

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Dem.: Exercițiu.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Substituția

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$.

Lema 1.44

Fie x o variabilă, u un termen și $a = u^{\mathcal{A}}(e)$.

(i) Pentru orice termen t, $(t_x(u))^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a})$.

(ii) Pentru orice formulă φ, dacă x este liberă pentru u în φ, atunci

$$\mathcal{A} \vDash \varphi_x(u)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}].$$

Ideea lemei este următoarea: a schimba evaluarea e pentru a atribui variabilei x valoarea $a \in A$ este același lucru cu a înlocui x cu un termen u a cărui interpretare sub e este a.

Propoziția 1.45

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x,

(i) *pentru orice termen t,*

$$\vDash u_1 = u_2 \to t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) *pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ,*

$$\vDash u_1 = u_2 \to (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$. Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (u_1 = u_2)[e]$, adică $u_1^{\mathcal{A}}(e) = u_2^{\mathcal{A}}(e) := a \in A$.

(i) Conform Lemei 1.44.(i),

$$(t_x(u_1))^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = (t_x(u_2))^{\mathcal{A}}(e),$$

deci $\mathcal{A} \vDash (t_x(u_1) = t_x(u_2))[e]$.

(ii) Aplicând Lema 1.44.(ii), obținem

$$\mathcal{A} \vDash \varphi_x(u_1)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi_x(u_2)[e].$$

Deci, $\mathcal{A} \vDash (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2))[e]$. $\square$

Propoziția 1.46

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) *Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,*

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(u), \qquad \vDash \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

(ii) $\vDash \forall x\varphi \to \varphi, \qquad \vDash \varphi \to \exists x\varphi.$

(iii) *Pentru orice simbol de constantă c,*

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(c), \qquad \vDash \varphi_x(c) \to \exists x\varphi.$$

Dem.:

(i) Fie $\mathcal{A}$ și $e : V \to A$. Atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \vDash \forall x\varphi[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\\ &\implies \text{pentru } a = u^{\mathcal{A}}(e),\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi_x(u)[e] \quad \text{conform Lemei 1.44.(ii)}.\end{aligned}$$

A doua aserțiune rezultă din prima aplicată la $\neg\varphi$.

Propoziția 1.47

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) *Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,*

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(u), \qquad \models \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \to \varphi$, $\qquad \models \varphi \to \exists x\varphi$.

(iii) *Pentru orice simbol de constantă c,*

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(c), \qquad \models \varphi_x(c) \to \exists x\varphi.$$

Dem.: (continuare)

(ii) Aplicăm (i) cu $u := x$.

(iii) Aplicăm (i) cu $u := c$. $\square$

Substituția

În general, dacă x si y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \to \mathbb{N}$ a.î. $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash (x \dot{<} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \nvDash (x \dot{<} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 1.48

Pentru orice formulă φ, variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x \varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \exists y \varphi_x(y) \quad \textit{și} \quad \forall x \varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \forall y \varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 1.48 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Definiția 1.49

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \ldots, y_k$, varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- *dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ;*
- *dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;*
- *dacă $\varphi = \psi \to \chi$, atunci φ' este $\psi' \to \chi'$;*
- *dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci*

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w \psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \ldots, y_k\} \\ \forall z \psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \ldots,$ care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \ldots, y_k$.

Definiția 1.50

φ' este variantă a lui φ dacă este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \ldots, y_k$.

Propoziția 1.51

(i) *Pentru orice formulă φ, dacă φ' este o variantă a lui φ, atunci $\varphi \mathrel{\text{H}} \varphi'$;*

(ii) *Pentru orice formulă φ și orice termen t, dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \ldots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ, atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.*

Forma normală prenex

Definiția 1.52

O formulă care nu conține cuantificatori se numește liberă de cuantificatori ("quantifier-free").

Definiția 1.53

O formulă φ este în formă normală prenex dacă

$$\varphi = Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n\,\psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \dots, x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește matricea lui φ și $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n$ este prefixul lui φ.

Exemple de formule în formă normală prenex:

- Formulele universale: $\varphi = \forall x_1\forall x_2\dots\forall x_n\,\psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori
- Formulele existențiale: $\varphi = \exists x_1\exists x_2\dots\exists x_n\,\psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori

Forma normală prenex

Fie φ o formulă și $t_1, \ldots, t_n$ termeni care nu conțin variabile din φ. Notăm cu $\varphi_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n)$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui $x_1, \ldots, x_n$ cu $t_1, \ldots, t_n$ respectiv.

Notații: $\forall^c = \exists, \quad \exists^c = \forall$.

Teorema 1.54 (Teorema de formă normală prenex)
Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Atunci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \neg\psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă

$\psi^* = Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\psi_0$ în formă normală prenex a.î. $\psi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^c x_1 \ldots Q_n^c x_n \neg\psi_0.$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $\varphi^* \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \neg\psi^* \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.

- $\varphi = \psi \to \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă normală prenex

$$\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi_0, \quad \chi^* = S_1 z_1 \ldots S_m z_m \chi_0$$

a.î. $\psi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$.
Notăm cu V_0 mulțimea tuturor variabilelor care apar în ψ^* sau χ^*.
Fie $\tilde{\psi}^*$ (resp. $\tilde{\chi}^*$) varianta V_0-liberă a lui ψ^* (resp. χ^*). Atunci

$$\tilde{\psi}^* = Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\chi}^* = S_1 w_1 \ldots S_m w_m \tilde{\chi}_0,$$

unde $y_1, \ldots, y_n, w_1, \ldots, w_m$ sunt variabile care nu apar în V_0,
$\tilde{\psi}_0 = {\psi_0}_{x_1,\ldots,x_n}(y_1, \ldots, y_n)$ și $\tilde{\chi}_0 = {\chi_0}_{z_1,\ldots,z_m}(w_1, \ldots, w_m)$.
Conform Propoziției 1.51.(i), $\tilde{\psi}^* \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \psi^*$ și $\tilde{\chi}^* \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \chi^*$. De asemenea, $FV(\tilde{\psi}^*) = FV(\psi^*)$ și $FV(\tilde{\chi}^*) = FV(\chi^*)$.

Forma normală prenex

Definim

$$\varphi^* := Q_1^c y_1 \ldots Q_n^c y_n S_1 w_1 \ldots S_m w_m \, (\tilde{\psi_0} \to \tilde{\chi_0}).$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\begin{aligned} \varphi^* & \mathrel{\text{⫤⊨}} \tilde{\psi}^* \to \tilde{\chi}^* \\ & \mathrel{\text{⫤⊨}} \psi^* \to \chi^* \\ & \mathrel{\text{⫤⊨}} \psi \to \chi = \varphi. \end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă normală prenex a.î. $\psi \mathrel{\text{⫤⊨}} \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.
Definim $\varphi^* := \forall x \psi^*$. □

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y,z) = c) \wedge \neg\exists x(f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned}\varphi \quad &\mathrel{\text{ᗺ}} \quad \exists y\big(g(y,z) = c \wedge \neg\exists x(f(x) = d)\big)\\ &\mathrel{\text{ᗺ}} \quad \exists y\big(g(y,z) = c \wedge \forall x\neg(f(x) = d)\big)\\ &\mathrel{\text{ᗺ}} \quad \exists y\forall x\big(g(y,z) = c \wedge \neg(f(x) = d)\big)\end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y\forall x\big(g(y,z) = c \wedge \neg(f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg\forall y(S(y) \to \exists z R(z)) \land \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned}
\varphi \;&\mathrel{\text{⫤⊨}}\; \exists y\neg(S(y) \to \exists z R(z)) \land \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d)\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}}\; \exists y\neg\exists z(S(y) \to R(z)) \land \forall x(\forall y P(x,y) \to f(x) = d)\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}}\; \exists y\neg\exists z(S(y) \to R(z)) \land \forall x\exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}}\; \exists y\forall z\neg(S(y) \to R(z)) \land \forall x\exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}}\; \exists y\forall z\big(\neg(S(y) \to R(z)) \land \forall x\exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\big)\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}}\; \exists y\forall z\forall x\big(\neg(S(y) \to R(z)) \land \exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\big)\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}}\; \exists y\forall z\forall x\big(\neg(S(y) \to R(z)) \land \exists v(P(x,v) \to f(x) = d)\big)\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}}\; \exists y\forall z\forall x\exists v\big(\neg(S(y) \to R(z)) \land (P(x,v) \to f(x) = d)\big)
\end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y\forall z\forall x\exists v\big(\neg(S(y) \to R(z)) \land (P(x,v) \to f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Forma normală Skolem

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite simboluri de funcții/constante Skolem.

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:
Dacă φ este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.
Altfel, φ are una din formele:

- $\varphi = \exists x\, \psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x\, \psi$ $(k \geq 1)$. Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi_x(fx_1 \ldots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ.
Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots$, până ajungem la o formulă universală și aceasta este φ^{Sk}.

φ^{Sk} este o formă normală Skolem a lui φ.

Exemple

- Fie θ o formulă liberă de cuantificatori a.î. $FV(\theta) = \{x\}$ și $\varphi = \exists x\, \theta$. Atunci $\varphi^1 = \theta_x(c)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$.
- Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z\, R(x, y, z)$. Atunci
$$\varphi^1 = \forall y \forall z\, (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z\, R(c, y, z),$$
unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z\, P(c, y, z)$.
- Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z\, P(y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y\, (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y\, P(y, f(y))$, unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y\, P(y, f(y))$.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f. Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v \, (R(y,z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}
\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v \, (R(y,z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\
&= \forall y \forall u \exists v \, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = v), \\
&\quad \text{unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\
\varphi^2 &= \forall y \forall u \, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y,u)) \\
&= \forall y \forall u \, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = h(y,u)), \\
&\quad \text{unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.}
\end{aligned}$$

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u \, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = h(y,u)).$$

Teorema 1.55 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie φ un enunț în formă normală prenex.

(i) $\vDash \varphi^{Sk} \to \varphi$, *deci* $\varphi^{Sk} \vDash \varphi$ *în* $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

(ii) φ *este satisfiabilă ddacă* φ^{Sk} *este satisfiabilă.*

Dem.:

(i) Se aplică faptul că $\vDash \varphi_x(t) \to \exists x\varphi$, $\vDash \varphi$ implică $\vDash \forall x\varphi$ și $\vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ pentru a conclude că $\vDash \varphi^1 \to \varphi$, $\vDash \varphi^2 \to \varphi^1$, etc..

(ii) "$\Leftarrow$" Se aplică (i). "$\Rightarrow$" Exercițiu suplimentar. □

Observație

În general, φ și φ^{sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

Dem.: Fie $\mathcal{L} = (R)$, unde R este simbol de relație binară și $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$. Atunci $\varphi^{Sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$ (unde f este un nou simbol de funcție unară) și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = (f, R)$. Fie $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$-structura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$, unde $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \varphi$, deoarece pentru orice număr întreg m există un număr întreg n a.î. $m < n$. Pe de altă parte, $\mathcal{A} \nvDash \varphi^{Sk}$, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$. $\square$

Notație: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

Lema 1.56

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ,

(i) $\Gamma \vDash \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.

(ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.

(iii) Γ *este satisfiabilă* $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Teorii

Definiția 1.57

O *$\mathcal{L}$-teorie* *este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:*

$$\textit{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \vDash \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 1.58

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, *teoria generată de* *Γ este mulțimea*

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \vDash \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Propoziția 1.59

(i) $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$.

(ii) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(iii) $Th(\Gamma)$ *este o teorie.*

(iv) $Th(\Gamma)$ *este cea mai mică teorie* T *a.î.* $\Gamma \subseteq T$.

Dem.:

(i) Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \vDash \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$.

(ii) "$\supseteq$" Conform (i) și Lemei 1.56.(ii).
"$\subseteq$" Conform definiției lui $Th(\Gamma)$.

(iii) Pentru orice enunț φ, avem că
$Th(\Gamma) \vDash \varphi \iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$
$\iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ (conform (ii)) $\iff \varphi \in Th(\Gamma)$.

(iv) Fie T o teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \vDash \varphi$. Deoarece T este teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$. $\square$

Propoziția 1.60

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ,

(i) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Th(\Gamma) \subseteq Th(\Delta)$.

(ii) Γ *este teorie* $\iff \Gamma = Th(\Gamma)$.

(iii) $Th(\emptyset) = \{\varphi \mid \varphi$ *este enunț valid*$\}$ *este inclusă în orice teorie.*

Dem.: Exercițiu ușor.

- O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește teorie axiomatică sau teorie prezentată axiomatic. Γ se numește mulțime de axiome pentru $Th(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Teorii

Definiția 1.61

O teorie T este finit axiomatizabilă dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ.

Definiția 1.62

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ. Spunem și că Γ axiomatizează $\mathcal{K}$.

Definiția 1.63

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este finit axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime finită de enunțuri Γ.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x (x \dot{\equiv} x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\equiv} y \to y \dot{\equiv} x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\equiv} y \land y \dot{\equiv} z \to x \dot{\equiv} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este

$$T := Th((REFL), (SIM), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A.
- $\mathcal{K} = Mod(T)$, deci T axiomatizează $\mathcal{K}$.
- Spunem și că T axiomatizează clasa relațiilor de echivalență.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y \big(\neg(x = y) \land x \dot{\equiv} y \land \forall z (z \dot{\equiv} x \rightarrow (z = x \lor z = y))\big),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

Exemple - Teoria grafurilor

Un graf este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V. Elementele lui V se numesc vârfuri, iar elementele lui E se numesc muchii.

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- $\mathcal{L}_{Graf}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \to \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt grafurile.
- T axiomatizează clasa grafurilor.

Exemple - Teoria ordinii parțiale

- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$
\begin{aligned}
(REFL) &:= \forall x (x \dot{\leq} x) \\
(ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \land y \dot{\leq} x \to x = y) \\
(TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \land y \dot{\leq} z \to x \dot{\leq} z)
\end{aligned}
$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.

Exemple - Teoria ordinii stricte

- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg(x \dot{<} x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.

Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

$$(TOTAL) \quad := \quad \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.

Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

$$(DENS) \quad := \quad \forall x \forall y \big(x \dot{<} y \to \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y)\big).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.

Exemple - Teoria egalității

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 1.64

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemple - Teoria egalității

Notații

- Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.
- $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 1.65

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \exists^{\leq n} &\iff A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \vDash \exists^{=n} &\iff A \text{ are exact } n \text{ elemente.} \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.66

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash T \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Teorema 1.67 (Teorema de compacitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 1.68

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

(*) pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură finită a.î. $|A| \geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$ și $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ deoarece $\mathcal{A}$ este finită.

Prin urmare, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model $\mathcal{B}$.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, $\mathcal{B}$ este finită.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.
Am obținut o contradicție. $\square$

Corolar 1.69

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 1.70

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu $\mathcal{K}_{Inf}$ clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite.
Conform Propoziției 1.66, pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff A \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

Presupunem că $\mathcal{K}_{Inf}$ este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = Mod(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\varphi)$.
Rezultă că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \text{ este finită } \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 1.68. $\square$.

Corolar 1.71

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 1.72

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$, deci $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Δ are un model $\mathcal{B}$. Prin urmare, $\mathcal{B}$ este un model infinit al lui Γ. $\square$

Propoziția 1.73

Dacă un enunț φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 1.72, rezultă că Γ are un model infinit $\mathcal{A}$. Prin urmare, $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. $\square$

Propoziția 1.74

Fie Γ o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(*) *pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.*

Atunci

(i) *Γ are un model infinit.*

(ii) *Clasa modelelor finite ale lui Γ nu este axiomatizabilă.*

(iii) *Clasa modelelor infinite ale lui Γ este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.*

Dem.: Exercițiu.

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, $\dot{S}$ este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție $\mathcal{L}$-termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 1.75

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ se numește non-standard dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește element non-standard.

Teoria lui $\mathcal{N}$ se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \vDash \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 1.76

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \ldots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

Fie $n_0 > \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Considerăm extensia $\mathcal{N}^+$ a lui $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}^+$ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \vDash \Gamma_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că $a := c^{\mathcal{A}}$ este element non-standard al lui $\mathcal{A}$. $\square$

SINTAXA

Definiția 1.77

Mulțimea $LogAx_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ a axiomelor logice ale lui $\mathcal{L}$ constă din:

(i) *toate tautologiile;*

(ii) *pentru orice termeni s, t, u, toate formulele de forma*

$$t = t, \quad s = t \to t = s, \quad s = t \land t = u \to s = u;$$

(iii) *pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots s_m, t_m$, toate formulele de forma*

$$t_1 = u_1 \land \ldots \land t_m = u_m \to ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m,$$

$$t_1 = u_1 \land \ldots \land t_m = u_m \to (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m);$$

(iv) *toate formulele de forma*

$$\varphi_x(t) \to \exists x \varphi,$$

unde $\varphi_x(t)$ este o substituție liberă ($\exists$-axiomele).

Axiomele de la (ii) și (iii) se numesc și axiomele egalității.

Definiția 1.78

Regulile de deducție (sau inferență) sunt următoarele: pentru orice formule φ, ψ,

(i) din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi};$$

(ii) dacă $x \notin FV(\psi)$, atunci din $\varphi \to \psi$ se inferă $\exists x\varphi \to \psi$ ($\exists$-introducerea):

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi} \quad \text{dacă } x \notin FV(\psi).$$

Fie Γ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 1.79

Mulțimea $Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ a Γ-teoremelor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

(i) $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq \Sigma$;

(ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;

(iii) *Σ este închisă la regulile de deducție, i.e.*

  (a) *dacă $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$;*

  (b) *dacă $\varphi \to \psi \in \Sigma$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\exists x\varphi \to \psi \in \Sigma$.*

Dacă $\varphi \in Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notații

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi & := & \varphi \text{ este } \Gamma\text{-teoremă} \\
Thm_{\mathcal{L}} & := & Thm_{\mathcal{L}}(\emptyset) \\
\vdash_{\mathcal{L}} \varphi & := & \emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \\
\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Delta & := & \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.
\end{array}
$$

Definiția 1.80

O formulă φ se numește teoremă (logică) a lui $\mathcal{L}$ dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Convenție

Când $\mathcal{L}$ este clar din context, scriem *LogAx*, *Thm*, *Thm*(Γ), $\Gamma \vdash \varphi$, $\vdash \varphi$, etc..

Γ-teoreme

Lema 1.81

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, au loc următoarele proprietăți:

(i) *dacă φ este axiomă logică, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(ii) *dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(iii) *dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$;*

(iv) *dacă $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\Gamma \vdash \exists x\varphi \rightarrow \psi$.*

Γ-demonstrații

Definiția 1.82

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) θ_i *este axiomă;*

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) *există* $k, j < i$ *a.î.* $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$;

(iv) *există* $j < i$ *și* $x \in V$, φ, ψ *formule a.î.* $x \notin FV(\psi)$, $\theta_j = \varphi \to \psi$ *și* $\theta_i = \exists x\varphi \to \psi$.

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Definiția 1.83

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ-demonstrației.

Propoziția 1.84

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Propoziția 1.85

Pentru orice mulțimi de formule Γ *și orice formulă* φ, $\Gamma \vdash \varphi$ *ddacă există o submulțime finită* Σ *a lui* Γ *a.î.* $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: "$\Leftarrow$" Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Deoarece $\Sigma \subseteq \Gamma$, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.
"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 1.84, φ are o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$ este o Σ-demonstrație a lui φ, deci $\Sigma \vdash \varphi$. $\square$

Teorema 1.86 (Teorema tautologiei)

Dacă ψ este consecință tautologică a formulelor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ și $\Gamma \vdash \varphi_1, \ldots, \Gamma \vdash \varphi_n$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

Teorema 1.87 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \cup \{\psi\}$ o mulțime de formule și φ un enunț. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \text{ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Închiderea universală

Definiția 1.88

Fie φ o formulă a.î. $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Închiderea universală a lui φ este enunțul

$$\overline{\forall \varphi} := \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi.$$

Notație: Dacă Γ este o mulțime de formule, $\overline{\forall \Gamma} := \{\overline{\forall \varphi} \mid \varphi \in \Gamma\}$.

Observație

φ enunț $\implies \overline{\forall \varphi} = \varphi$; Γ mulțime de enunțuri $\implies \overline{\forall \Gamma} = \Gamma$.

Propoziția 1.89

Dacă Γ este mulțime de enunțuri, atunci pentru orice φ,

$$\Gamma \vDash \varphi \iff \Gamma \vDash \overline{\forall \varphi}.$$

Dem.: Exercițiu.

Teorema 1.90 (Teorema de corectitudine ("soundness"))

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formulă* φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \overline{\forall \Gamma} \vDash \varphi.$$

În particular, dacă Γ *este mulțime de enunțuri, atunci*

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi.$$

Mulțimi consistente

Definiția 1.91

O mulțime Γ *de formule se numește* *consistentă* *dacă există o formulă* φ *astfel încât* $\Gamma \not\vdash \varphi$*.*
Γ *se numește* *inconsistentă* *dacă nu este consistentă, i.e.* $\Gamma \vdash \varphi$ *pentru orice formulă* φ*.*

Propoziția 1.92

Pentru orice mulțime Γ *de formule, următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) Γ *este inconsistentă;*

(ii) *pentru orice formulă* ψ, $\Gamma \vdash \psi$ *și* $\Gamma \vdash \neg\psi$*;*

(iii) *există o formulă* ψ *a.î.* $\Gamma \vdash \psi$ *și* $\Gamma \vdash \neg\psi$*.*

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.93

Pentru orice mulțime Γ *de formule, următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) Γ *este inconsistentă;*

(ii) Γ *are o submulțime finită inconsistentă.*

Dem.: (ii)$\Rightarrow$(i) Exercițiu imediat.
(i)$\Rightarrow$(ii) Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci există ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$. Aplicând Propoziția 1.85, obținem submulțimi finite Σ_1, Σ_2 ale lui Γ a.î. $\Sigma_1 \vdash \psi$ și $\Sigma_2 \vdash \neg\psi$. Fie $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Atunci Σ este submulțime finită a lui Γ care este inconsistentă. □

Un rezultat echivalent:

Propoziția 1.94

O mulțime Γ *de formule este consistentă dacă și numai dacă orice submulțime finită a lui* Γ *este consistentă.*

Propoziția 1.95

Fie Γ *o mulțime de formule și* φ *un enunț.*

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *este inconsistentă.*

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă.*

Dem.: (i) "$\Rightarrow$" $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ $\implies \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

"$\Leftarrow$"

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă
(2)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \varphi$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	tautologie
(4)	$\Gamma \vdash \varphi$	(MP): (2),(3)

(ii) Exercițiu. $\square$

Teorema 1.96 (Teorema de completitudine (prima formă)

Orice mulțime consistentă de enunțuri Γ *este satisfiabilă.*

- Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat
- Henkin a dat în 1949 o demonstrație simplificată.

Teorema 1.97 (Teorema de completitudine (a doua formă))

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ și orice enunț φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Dem.: "$\Rightarrow$" Aplicăm Teorema de corectitudine 1.90.
$\Leftarrow$ Presupunem că $\Gamma \not\vdash \varphi$. Atunci, conform Propoziției 1.95.(i), $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistentă. Aplicăm Teorema de completitudine (prima formă) pentru a conclude că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ are un model $\mathcal{A}$. Deoarece $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ și $\Gamma \vDash \varphi$, obținem că $\mathcal{A}$ este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. În particular, $\mathcal{A} \vDash \varphi$ și $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi$, ceea ce este o contradicție. $\square$

LOGICI MODALE

Referința de bază:

P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, Modal logic, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 53, Cambridge University Press, 2001

Definiția 2.1

O structură relațională este un tuplu $\mathcal{F}$ format din:

- *o mulțime nevidă W, numită universul (sau domeniul) lui $\mathcal{F}$*
- *o mulțime de relații pe W.*

Presupunem că fiecare structură relațională conține cel puțin o relație. Elementele lui W se numesc puncte, noduri, stări, lumi, timpi, instanțe sau situații.

Exemplul 2.2

O mulţime parţial ordonată $\mathcal{F} = (W, R)$, unde R este o relaţie binară pe W care este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.

Sistemele de tranziții etichetate (*Labeled Transition Systems*), sau, mai simplu, sistemele de tranziții, sunt structuri relaționale simple, foarte folosite în informatică. Folosim în continuare abrevierea LTS pentru aceste sisteme.

Definiția 2.3

Un LTS este o pereche $(W, \{R_a \mid a \in A\})$, unde W este o mulțime nevidă de stări, A este o mulțime nevidă de etichete și, pentru fiecare $a \in A$, $R_a \subseteq W \times W$ este o relație binară pe W.

Sistemele de tranziții pot fi văzute ca modele abstracte de calcul: stările sunt stările posibile ale unui calculator, etichetele sunt programe și $(u, v) \in R_a$ înseamnă că există o execuție a programului a care începe în starea u și se termină în starea v.

Fie W o mulțime nevidă și $R \subseteq W \times W$ o relație binară.

Scriem de obicei Rwv în loc de $(w, v) \in R$. Dacă Rwv, atunci spunem că v este R-accesibil din w.

Inversa lui R se notează R^{-1} și se definește astfel:

$$R^{-1}vw \quad \text{ddacă} \quad Rwv.$$

Definim $R^n (n \geq 0)$ inductiv:

$$R^0 = \{(w, w) \mid w \in R\}, R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n.$$

Așadar, pentru orice $n \geq 2$, avem că $R^n wv$ ddacă există $u_1, \ldots u_{n-1}$ a.î $Rwu_1, Ru_1 u_2, \ldots Ru_{n-1}v$.

Definiția 2.4

Limbajul modal de bază ML_0 este format din:

- *o mulțime PROP de propoziții atomice (notate $p, q, r, v, \ldots$);*
- *conectorii propoziționali: $\neg$, $\rightarrow$;*
- *constanta propozițională $\perp$ (falsul);*
- *parantezele: (,);*
- *operatorul modal $\Diamond$ ('diamond') (se citește diamant).*

Operatorul modal dual

Dualul lui $\Diamond$ se notează $\Box$ (se citește cutie) și se definește astfel:

$$\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi.$$

Definiția 2.5

Formulele limbajului modal de bază ML_0 sunt expresiile definite astfel:

(F0) *Orice propoziție atomică este formulă.*

(F1) *$\perp$ este formulă.*

(F2) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F3) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F4) *Dacă φ este formulă, atunci $(\Diamond\varphi)$ este formulă.*

(F5) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3), (F4) sunt formule.*

Observație

Formulele lui ML_0 sunt definite, folosind notația Backus-Naur, astfel:

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \to \psi) \mid (\Diamond\varphi), \quad \text{unde } p \in PROP.$$

Trei interpretări ale operatorilor modali $\Diamond$ și $\Box$ au fost extrem de influente.

Logica modală clasică

În logica modală clasică, $\Diamond\varphi$ este citit ca este posibil ca φ. Atunci $\Box\varphi$ înseamnă nu este posibil ca non φ, adică este necesar φ.

Exemple de formule pe care le putem privi ca principii corecte includ:

- $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ (ce este necesar este și posibil)
- $\varphi \to \Diamond\varphi$ (ce este, este posibil).

Ce putem spune despre formule ca $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ (ce este, este necesar posibil) sau $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ (ce este posibil, este necesar posibil)? Pot fi ele privite ca adevăruri generale? Pentru a da un răspuns la astfel de întrebări trebuie să definim o semantică pentru logica modală clasică.

Logica epistemică

În logica epistemică, limbajul modal de bază este folosit pentru a raționa despre cunoaștere. În această logică,

$\Box\varphi$ se citește agentul știe că φ.

Se scrie $K\varphi$ în loc de $\Box\varphi$.

Deoarece discutăm despre cunoaștere, este natural să considerăm că este adevărată formula

$K\varphi \to \varphi$ (dacă agentul știe că φ, atunci φ trebuie să aibă loc)

Presupunând că agentul nu este atotștiutor, formula $\varphi \to K\varphi$ ar trebui să fie falsă.

Logica demonstrabilității (Provability logic)

În această logică,

$\Box\varphi$ se citește se poate demonstra (într-o teorie aritmetică) faptul că φ.

O temă centrală a logicii demonstrabilității este găsirea de axiomatizări complete pentru principii de demonstrabilitate care sunt valide pentru diverse teorii aritmetice (cum ar fi aritmetica Peano).
O formulă foarte importantă în acest context este formula Löb:

$$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$$

Definiția 2.6

Un limbaj modal ML este format din:

- *o mulțime $PROP$ de propoziții atomice ;*
- *conectorii propoziționali: $\neg$, $\rightarrow$;*
- *constanta propozițională $\perp$ (falsul);*
- *parantezele: (,);*
- *o mulțime O de operatori modali sau modalități;*
- *o funcție aritate $\rho : O \rightarrow \mathbb{N}$.*

ML este unic determinat de $PROP$ și de perechea $\tau := (O, \rho)$. Folosim și notația $ML := ML(PROP, \tau)$ pentru a specifica acest fapt. τ se numește tipul de similaritate al lui ML.

Limbajul modal de bază

Notăm cu τ_0 tipul de similaritate al limbajului modal de bază ML_0, deci $ML_0 = ML(PROP, \tau_0)$. Atunci $\tau_0 = (\{\Diamond\}, \rho)$ cu $\rho(\Diamond) = 1$.

Limbaje modale

Fie $ML := ML(PROP, \tau)$ un limbaj modal.

- Propozițiile atomice se notează $p, q, r, v, \ldots$.
- Elementele lui O se notează Δ, Δ_0, $\Delta_1, \ldots$ și se numesc operatori modali.
- Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, notăm $O_m := \{\Delta \in O \mid \rho(\Delta) = m\}$.
Așadar, O_m este mulțimea operatorilor modali de aritate m.
- Operatorii modali unari sunt cei de aritate 1. Ne referim adesea la ei ca diamante și îi notăm de multe ori $\Diamond_a$ sau $\langle a \rangle$, unde a este un element dintr-o mulțime de indici.
- Definiția permite și operatori modali de aritate 0, care se mai numesc și constante modale.

Mulțimea $Sim(ML)$ a simbolurilor lui ML este

$$Sim(ML) := PROP \cup \{\neg, \rightarrow, \bot, (,)\} \cup O.$$

Mulțimea $Expr(ML)$ a expresiilor lui ML este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui ML.

Definiția 2.7

Formulele lui ML sunt expresiile lui ML definite astfel:

(F0) *Orice propoziție atomică este formulă.*

(F1) $\perp$ *este formulă.*

(F2) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F3) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F4) *Dacă $m \in \mathbb{N}$, $\Delta \in O_m$ și $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sunt formule, atunci $(\Delta(\varphi_1 \ldots \varphi_m))$ este formulă.*

(F5) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3), (F4) sunt formule.*

Limbaje modale

Notație: Mulțimea formulelor se notează *Form*(*ML*).

- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3), (F4) de un număr finit de ori.
- $Form(ML) \subseteq Expr(ML)$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Observație

Mulțimea $Form(ML)$ este definită folosind notația Backus-Naur, astfel:

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \to \psi) \mid (\Delta(\varphi_1 \ldots \varphi_{\rho(\Delta)})), \quad \text{unde } p \in PROP.$$

*Citire unică (*Unique readability*)*

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = p$, unde p este propoziție atomică;
- $\varphi = \bot$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;
- $\varphi = (\Delta(\psi_1 \ldots \psi_m))$, unde $m \in \mathbb{N}$, $\Delta \in O_m$ și $\psi_1, \ldots, \psi_m$ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Limbaje modale

Conectorii propoziționali $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și constanta $\top$ (adevărul) sunt definiți ca în logica propozițională clasică:

$$\varphi \vee \psi := ((\neg\varphi) \to \psi) \qquad \varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \to (\neg\psi))$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi := ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \qquad \top := \neg\bot.$$

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, $\Delta(\varphi_1 \ldots \varphi_m)$.
- Uneori scriem $\Delta(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ în loc de $\Delta(\varphi_1 \ldots \varphi_m)$.
- Dacă Δ este un diamant, atunci scriem $\Delta\varphi$ în loc de $\Delta(\varphi)$. Prin urmare, scriem $\Diamond_a\varphi$ sau $\langle a\rangle\,\varphi$.
- Operatorii modali binari sunt cei de aritate 2. Pentru aceștia folosim adesea notația infixă: scriem $\varphi\Delta\psi$ în loc de $\Delta(\varphi, \psi)$.
- Operatorii modali au precedență mai mare decât ceilalți conectori, $\neg$ are precedență mai mare decât ceilalți conectori propoziționali.

Operatorii modali duali

Definim acum operatori duali pentru modalitățile de aritate ≥ 1. Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ și $\Delta \in O_m$. Dualul ∇ al lui Δ este definit astfel:

$$\nabla(\varphi_1 \ldots \varphi_m) := \neg\Delta(\neg\varphi_1 \ldots \neg\varphi_m).$$

Ca și în logica modală de bază, dualul unui diamant se numește cutie. Dualul lui $\Diamond_a$ se notează $\Box_a$, iar dualul lui $\langle a \rangle$ se notează $[a]$. Așadar,

$$\Box_a\varphi = \neg\Diamond_a\neg\varphi, \quad [a] = \neg \langle a \rangle \neg\varphi.$$

Logică temporală de bază

Fie tipul de similaritate $\tau = (O, \rho)$, unde $O = \{\langle F\rangle, \langle P\rangle\}$ și $\rho(\langle F\rangle) = \rho(\langle P\rangle) = 1$. Limbajul determinat de τ (și de $PROP$) se numește limbajul temporal de bază și este limbajul pe care se fundamentează logica temporală, una din cele mai importante logici modale, cu foarte multe aplicații în informatică.

Interpretarea intenționată pentru operatorii modali $\langle F\rangle, \langle P\rangle$ este:

- $\langle F\rangle \varphi$ se citește φ va fi adevărată cândva (într-un moment) în viitor (în engleză, φ will be true at some Future time). Prin urmare, F vine de la Future.
- $\langle P\rangle \varphi$ se citește φ a fost adevărată cândva (într-un moment) din trecut (în engleză, φ was true at some Past time). Prin urmare, P vine de la Past.

Este tradițional să scriem F în loc de $\langle F \rangle \varphi$ și P în loc de $\langle P \rangle \varphi$. Dualul lui F se notează G, iar dualul lui P se notează H. Așadar, interpretarea pentru operatorii G, H este:

- $G\varphi$ se citește φ va fi adevărată în orice moment viitor (în engleză, it is always Going to be the case that φ).
- $H\varphi$ se citește φ a fost adevărată în orice moment din trecut (în engleză, it always Has been the case that φ).

Fie $ML := ML(PROP, \tau)$ un limbaj modal.

Definiția 2.8

O substituție este o funcție $\sigma : PROP \to Form(ML)$.

O astfel de substituție σ induce o funcție

$$(\cdot)^{\sigma} : Form(ML) \to Form(ML)$$

definită recursiv astfel:

$$\begin{array}{rcl}
p^{\sigma} & = & \sigma(p) \\
\bot^{\sigma} & = & \bot \\
(\neg\varphi)^{\sigma} & = & \neg\varphi^{\sigma} \\
(\psi \to \varphi)^{\sigma} & = & \psi^{\sigma} \to \varphi^{\sigma} \\
\left(\Delta(\varphi_1 \ldots \varphi_m)\right)^{\sigma} & = & \Delta\left(\varphi_1^{\sigma} \ldots \varphi_m^{\sigma}\right) \text{ dacă } \Delta \in O_m
\end{array}$$

Această definiția formalizează riguros ce se înțelege prin substituție uniformă.

Rezultă imediat că

- $\top^\sigma = \top$, $(\psi \wedge \varphi)^\sigma = \psi^\sigma \wedge \varphi^\sigma$ și $(\psi \vee \varphi)^\sigma = \psi^\sigma \vee \varphi^\sigma$
- $\left(\nabla(\varphi_1 \ldots \varphi_m)\right)^\sigma = \nabla\left(\varphi_1^\sigma \ldots \varphi_m^\sigma\right)$.

Definiția 2.9

*Spunem că ψ este instanță de substituție (*substitution instance*) a lui φ dacă există o substituție σ astfel încât $\varphi^\sigma = \psi$.*

Exemplul 2.10

În ML_0 considerăm substituţia σ definită astfel:

$$\sigma(p) = (p \wedge \Box q),\ \sigma(q) = (\Diamond\Diamond q \vee r),\ \sigma(v) = v \text{ dacă } v \in PROP \setminus \{p, q\}.$$

Atunci

$$(p \wedge q \wedge r)^\sigma = ((p \wedge \Box q) \wedge (\Diamond\Diamond q \vee r) \wedge r).$$

SEMANTICA

În continuare dăm semantica limbajelor modale cu ajutorul structurilor relaționale. Facem acest lucru în două moduri:

- la nivelul modelelor, unde definim noțiunile fundamentale de satisfacere și adevăr;
- la nivelul cadrelor, unde definim noțiunea cheie de validitate.

Definim, mai întâi, cadrele, modelele și relația de satisfacere pentru limbajul modal de bază $ML_0 = ML(PROP, \tau_0)$.

Definiția 2.11

Un cadru (frame) pentru ML_0 este o pereche $\mathcal{F} = (W, R)$ astfel încât

- *W este o mulțime nevidă;*
- *R este o relație binară pe W.*

Așadar, un cadru este pur și simplu o structură relațională cu o singură relație binară.

Definiția 2.12

Un model pentru ML_0 este o pereche $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, unde

- *$\mathcal{F} = (W, R)$ este un cadru pentru ML_0;*
- *$V : PROP \to 2^W$ este o funcție numită evaluare.*

Prin urmare, funcția V asignează oricărei propoziții atomice $p \in PROP$ submulțimea $V(p)$ a lui W. Informal, ne gândim la $V(p)$ ca la mulțime punctelor din modelul $\mathcal{M}$ în care p este adevărată.
Se observă că modelele pot fi de asemenea văzute ca structuri relaționale într-un mod natural:

$$\mathcal{M} = (W, R, \{V(p) \mid p \in PROP\}).$$

Un model este o structură relațională care constă într-un domeniu, o relație binară și relațiile unare $V(p), p \in PROP$. Cadrul $\mathcal{F}$ și modelul $\mathcal{M}$ sunt două structuri relaționale având același univers. Totuși, așa cum vom vedea, modelele și cadrele sunt folosite în moduri foarte diferite.

Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model. Scriem și $\mathcal{M} = (W, R, V)$.

Spunem că modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ este bazat pe cadrul $\mathcal{F} = (W, R)$ sau că $\mathcal{F}$ este cadrul suport al lui $\mathcal{M}$. Elementele lui W se numesc stări în $\mathcal{F}$ sau în $\mathcal{M}$. Scriem de multe ori $w \in \mathcal{F}$ sau $w \in \mathcal{M}$.

Observație

Elementele din W se mai numesc și lumi sau lumi posibile, având ca inspirație filosofia lui Leibniz și interpretarea limbajului modal de bază, în care $\Diamond\varphi$ înseamnă posibil φ și $\Box\varphi$ înseamnă necesar φ. În concepția lui Leibniz, necesitate înseamnă adevăr în toate lumile posibile și posibilitate înseamnă adevăr într-o lume posibilă.

Interpretăm în continuare limbajul ML_0, definind următoarea noțiune de satisfacere.

Definiția 2.13

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model și w o stare în $\mathcal{M}$. Definim inductiv noțiunea

formula φ este satisfăcută (sau adevărată) în $\mathcal{M}$ în starea w,
notație $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$

$$
\begin{array}{rll}
\mathcal{M}, w \Vdash p & \text{ddacă} & w \in V(p), \quad \text{unde } p \in PROP \\
\mathcal{M}, w \Vdash \bot & & \text{niciodată} \\
\mathcal{M}, w \Vdash \neg\varphi & \text{ddacă} & \text{nu este adevărat că } \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \\
\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \to \psi & \text{ddacă} & \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \text{ implică } \mathcal{M}, w \Vdash \psi \\
\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi & \text{ddacă} & \text{există } v \in W \text{ a.î. } Rwv \text{ și } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.
\end{array}
$$

Notație

Dacă $\mathcal{M}$ nu satisface φ în w, scriem $\mathcal{M}, w \nVdash \varphi$ și spunem că φ este falsă în $\mathcal{M}$ în starea w.

Rezultă din Definiția 2.13 că pentru orice model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ și pentru orice stare $w \in W$,

- $\mathcal{M}, w \nVdash \bot$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \neg\varphi$ ddacă $\mathcal{M}, w \nVdash \varphi$.

Notație

Extindem evaluarea V de la propoziții atomice la formule arbitrare φ a.î. $V(\varphi)$ este mulțimea tuturor stărilor din $\mathcal{M}$ în care φ este adevărată:

$$V(\varphi) = \{w \mid \mathcal{M}, w \Vdash \varphi\}.$$

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model și w o stare în $\mathcal{M}$.

Observație

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi \quad \text{ddacă} \quad \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \text{ sau } \mathcal{M}, w \Vdash \psi$$
$$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi \quad \text{ddacă} \quad \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \text{ și } \mathcal{M}, w \Vdash \psi$$

Propoziția 2.14

Pentru orice formulă φ,

$\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi$ *ddacă pentru orice $v \in W$, Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$.*

Dem.: Exercițiu.

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model și w o stare în $\mathcal{M}$.

Propoziția 2.15

Pentru orice $n \geq 1$ și orice formulă φ, definim

$$\Diamond^n \varphi := \underbrace{\Diamond\Diamond \ldots \Diamond}_{n \text{ ori}} \varphi, \qquad \Box^n \varphi := \underbrace{\Box\Box \ldots \Box}_{n \text{ ori}} \varphi.$$

Atunci

$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond^n \varphi$ *ddacă* *există $v \in V$ a.î. $R^n wv$ și $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$*

$\mathcal{M}, w \Vdash \Box^n \varphi$ *ddacă* *pentru orice $v \in V$, $R^n wv$ implică $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$.*

Dem.: Exercițiu.

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model.

Definiția 2.16

- *O formulă φ este global adevărată sau simplu adevărată în $\mathcal{M}$ dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ pentru orice $w \in W$. Notație: $\mathcal{M} \Vdash \varphi$*
- *O formulă φ este satisfiabilă în $\mathcal{M}$ dacă există o stare $w \in W$ a.î. $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$.*

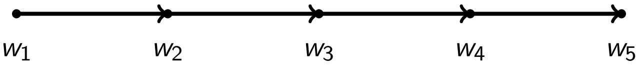
Definiția 2.17

Fie Σ o mulțime de formule.

- *Σ este adevărată în starea w în $\mathcal{M}$ dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Sigma$. Notație: $\mathcal{M}, w \Vdash \Sigma$*
- *Σ este global adevărată sau simplu adevărată în $\mathcal{M}$ dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \Sigma$ pentru orice stare w din $\mathcal{M}$. Notație: $\mathcal{M} \Vdash \Sigma$*
- *Σ este satisfiabilă în $\mathcal{M}$ dacă există o stare $w \in W$ a.î. $\mathcal{M}, w \Vdash \Sigma$.*

Exemplul 2.18

Fie cadrul $\mathcal{F} = (W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, R)$, unde Rw_iw_j ddacă $j = i + 1$:



Alegem o evaluare V astfel încât $V(p) = \{w_2, w_3\}$, $V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ şi $V(r) = \emptyset$.
Considerăm modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$. Atunci

(i) $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box p$

(ii) $\mathcal{M}, w_1 \nVdash \Diamond\Box p \to p$

(iii) $\mathcal{M}, w_2 \Vdash \Diamond(p \wedge \neg r)$

(iv) $\mathcal{M}, w_1 \Vdash q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)))$

(v) $\mathcal{M} \Vdash \Box q$.

Dem.: Exerciţiu.

Noțiunea de satisfacere este internă și locală. Evaluăm formulele în interiorul modelelor, într-o stare particulară w (starea curentă).

În cazul operatorilor modali $\Diamond, \Box$, nu verificăm adevărul lui φ în toate stările din W ci numai în acelea care sunt R-accesibile din starea curentă.

Aceasta nu este o slăbiciune a noțiunii de satisfacere, ci, dimpotrivă, ne permite o foarte mare flexibilitate. Dacă luăm $R = W \times W$, atunci toate stările sunt accesibile din w, iar dacă luăm $R = \{(v, v) \mid v \in W\}$, atunci w este singura stare accesibilă din w. Acestea sunt cazurile extreme, dar, evident, sunt multe opțiuni de explorat.

Putem să ne punem următoarele întrebări naturale: ce se întâmplă dacă impunem anumite condiții asupra lui R (de exemplu, reflexivitate, simetrie, tranzitivitate, etc.), ce impact au aceste condiții asupra necesității și posibilității, ce principii sau reguli sunt justificate de aceste condiții?

Fie $ML := ML(PROP, \tau)$ un limbaj modal, unde $\tau = (O, \rho)$.

Definiția 2.19

Un cadru (frame) pentru ML este o pereche

$$\mathcal{F} = (W, \{R_\Delta \mid \Delta \in O\})$$

astfel încât

- *W este o mulțime nevidă;*
- *pentru orice $\Delta \in O$, R_Δ este o relație pe W de aritate $\rho(\Delta) + 1$.*

Și în acest caz, cadrele sunt structuri relaționale.

Notații

- Scriem uneori și $\mathcal{F} = (W, R_\Delta)_{\Delta \in O}$.
- Dacă O are un număr finit de operatori $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, scriem

$$\mathcal{F} = (W, R_{\Delta_1}, R_{\Delta_2}, \ldots, R_{\Delta_n}).$$

Noțiunea de model se definește exact ca în cazul limbajului modal de bază.

Definiția 2.20

Un model *pentru ML este o pereche* $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, *unde* $\mathcal{F} = (W, \{R_\Delta \mid \Delta \in O\})$ *este un cadru pentru ML și* $V : PROP \to 2^W$ *este o* evaluare.

Spunem că modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ este bazat pe cadrul $\mathcal{F}$ sau că $\mathcal{F}$ este cadrul suport al lui $\mathcal{M}$.
Scriem și $\mathcal{M} = (W, \{R_\Delta \mid \Delta \in O\}, V)$.
Elementele lui W se numesc stări sau lumi în $\mathcal{F}$ sau în $\mathcal{M}$. Scriem de multe ori $w \in \mathcal{F}$ sau $w \in \mathcal{M}$.

Fie $\mathcal{M} = (W, \{R_\Delta \mid \Delta \in O\}, V)$ un model și w o stare în $\mathcal{M}$.
Noțiunea

formula φ este satisfăcută (sau adevărată) în $\mathcal{M}$ în starea w,

notație $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$

se definește inductiv. Clauzele pentru propoziții atomice, $\bot, \neg, \rightarrow$ sunt la fel ca în cazul limbajului modal de bază.
Pentru operatori modali, avem două cazuri:

- Dacă $\Delta \in O_m$ cu $m \geq 1$, atunci

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Delta(\varphi_1 \ldots \varphi_m) \text{ ddacă } \text{ există } v_1, \ldots, v_m \in W \text{ a.î. } R_\Delta w v_1 \ldots v_m \text{ și } \mathcal{M}, v_i \Vdash \varphi_i \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, m$$

- Dacă $\rho(\Delta) = 0$, atunci

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Delta \quad \text{ddacă} \quad w \in R_\Delta.$$

Spre deosebire de alte modalități, constantele modale nu acesează alte stări. Semantica lor este similară cu cea a propozițiilor atomice, doar că relațiile unare folosite pentru a le interpreta nu sunt date de evaluare, sunt parte a cadrului suport.

Formulele (global) adevărate sau satisfiabile într-un model sunt definite exact ca în cazul limbajului modal de bază: o formulă este (global) adevărată (resp. satisfiabilă) într-un model ddacă este adevărată în orice stare (resp. într-o stare) a modelului.

Definim exact la fel mulțimile de formule adevărate într-o stare, (global) adevărate sau satisfiabile.

Ca mai înainte, extindem evaluarea V de la propoziții atomice la formule arbitrare.

Reamintim că limbajul temporal de bază are doi operatori modali unari F și P. Prin urmare, cadrele pentru acest limbaj sunt cadre

$$\mathcal{F} = (T, R_F, R_P)$$

care sunt formate dintr-o mulțime nevidă T și două relații binare pe T: R_F (relația în viitor) și R_P (relația în trecut), folosite pentru a interpreta F și P respectiv.

Totuși, având în vedere interpretarea intenționată a celor doi operatori, majoritatea acestor cadre sunt nepotrivite. Este clar că vrem să folosim cadre în care R_P este inversa lui R_F, adică

pentru orice $w, v \in W$, $R_F vw$ ddacă $R_P wv$.

Definiția 2.21

Un cadru bidirecțional este un cadru $\mathcal{F}$ de forma $\mathcal{F} = (T, R, R^{-1})$, unde R este o relație binară. Un model bidirecțional este un model bazat pe un cadru bidirecțional.

Vom interpreta limbajul temporal de bază numai în modele bidirecționale. Așadar, dacă $\mathcal{M} = (T, R, R^{-1}, V)$ este un model bidirecțional, atunci

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}, t \Vdash F\varphi & \text{ddacă} & \text{există } s \in T \text{ a.î. } Rts \text{ și } \mathcal{M}, s \Vdash \varphi \\ \mathcal{M}, t \Vdash P\varphi & \text{ddacă} & \text{există } s \in T \text{ a.î. } R^{-1}ts \text{ și } \mathcal{M}, s \Vdash \varphi \end{array}$$

Desigur, odată ce am impus această restricție, nu este necesar să menționăm explicit R^{-1}, deoarece este determinat de R. Prin urmare, putem interpreta limbajul temporal de bază în modele $\mathcal{M} = (T, R, V)$ bazate pe cadre $\mathcal{F} = (T, R)$, folosind clauzele:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}, t \Vdash F\varphi & \text{ddacă} & \text{există } s \in T \text{ a.î. } Rts \text{ și } \mathcal{M}, s \Vdash \varphi \\ \mathcal{M}, t \Vdash P\varphi & \text{ddacă} & \text{există } s \in T \text{ a.î. } Rst \text{ și } \mathcal{M}, s \Vdash \varphi \end{array}$$

Am punctat astfel interacțiunea fundamentală între cele două modalități. Desigur, pentru ca modelele noastre să fie într-adevăr temporale, trebuie ca R să aibă și alte proprietăți (de exemplu, tranzitivitatea, pentru a captura fluxul timpului).

Validitatea într-un cadru este unul din conceptele cheie în logica modală.

Definiția 2.22

Fie $\mathcal{F}$ un cadru pentru ML și φ o formulă.

- φ *este validă într-o stare* w *din* $\mathcal{F}$ *dacă* φ *este adevărată în* w *în orice model* $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ *bazat pe* $\mathcal{F}$.
- φ *este validă în* $\mathcal{F}$ *dacă este validă în orice stare* w *din* $\mathcal{F}$.
  Notație: $\mathcal{F} \Vdash \varphi$

Așadar, o formulă este validă într-un cadru dacă este adevărată în orice stare din orice model bazat pe cadru.

Cadre și validitate

Validitatea într-un cadru diferă în mod esențial de adevărul într-un model. Să dăm un exemplu simplu.

Dacă $\varphi \vee \psi$ este adevărată într-un model $\mathcal{M}$ în w, atunci φ este adevărată în $\mathcal{M}$ în w sau ψ este adevărată în $\mathcal{M}$ în w (conform definiției satisfacției).

Pe de altă parte, dacă $\varphi \vee \psi$ este validă într-un cadru $\mathcal{F}$ în w, nu rezultă că φ este validă în $\mathcal{F}$ în w sau ψ este validă în $\mathcal{F}$ în w ($p \vee \neg p$ este un contraexemplu).

Definiția 2.23

Fie **M** *o clasă de modele pentru ML,* **F** *o clasă de cadre pentru ML și φ o formulă. Spunem că*

- *φ este adevărată în* **M** *dacă este adevărată în orice model din* **M**. *Notație:* **M** $\Vdash \varphi$
- *φ este validă în* **F** *dacă este validă în orice cadru din* **F**. *Notație:* **F** $\Vdash \varphi$

Definiția 2.24

Mulțimea tuturor formulelor din ML care sunt valide într-o clasă de cadre **F** *se numește logica lui* **F** *și se notează $\Lambda_{\mathbf{F}}$.*

Exemplul 2.25

Considerăm limbajul modal de bază ML_0. Formulele $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$ şi $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ sunt valide în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0.

Dem.: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru arbitrar, w o stare din $\mathcal{F}$ și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe $\mathcal{F}$. Trebuie să arătăm că

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q).$$

Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(p \vee q)$. Atunci există $v \in W$ astfel încât Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash p \vee q$. Avem două cazuri:

- $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$, deci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$.
- $\mathcal{M}, v \Vdash q$. Atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond q$, deci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$.

Lăsăm ca exercițiu demonstrația faptului că $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ este validă în clasa tuturor cadrelor. $\Box$

Exemplul 2.26

Formula $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ din ML_0 nu este validă în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0.

Dem.: Trebuie să găsim un cadru $\mathcal{F} = (W, R)$, o stare w și un model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ a.î

$$\mathcal{M}, w \nVdash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p.$$

Considerăm următorul cadru: $\mathcal{F} = (W, R)$, unde

$$W = \{0, 1, 2\}, \quad R = \{(0, 1), (1, 2)\}$$

și luăm o evaluare V a.î $V(p) = \{2\}$. Atunci $\mathcal{M}, 0 \Vdash \Diamond\Diamond p$, deoarece $R^2 02$ și $\mathcal{M}, 2 \Vdash p$. Dar $\mathcal{M}, 0 \nVdash \Diamond p$, deoarece singurul punct R-accesibil din 0 este 1 și $\mathcal{M}, 1 \nVdash p$. $\square$

Definiția 2.27

Spunem că un cadru $\mathcal{F} = (W, R)$ pentru ML_0 este tranzitiv dacă R este tranzitivă.

Exemplul 2.28

Formula $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ din ML_0 este validă în clasa tuturor cadrelor tranzitive pentru ML_0.

Dem.: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru tranzitiv, w o stare din $\mathcal{F}$ și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe $\mathcal{F}$. Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\Diamond p$. Atunci există $u, v \in W$ a.î Rwu, Ruv și $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Deoarece R este tranzitivă, rezultă că Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Deci, $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$. $\square$

Consecințe modale

Până acum nu am spus nimic despre consecința logică pentru limbaje modale. Ce înseamnă că o formulă este consecință logică a unei mulțimi de formule?
Introducem două familii de relații de consecință: locală și globală.
Ambele sunt definite semantic, în termeni de clase de structuri.
Ideile de bază sunt:

- o relație de consecință semantică are loc dacă adevărul premizelor garantează adevărul concluziei;
- inferențele depind de clasele de structuri cu care lucrăm (de exemplu, inferențele pentru cadrele tranzitive trebuie să fie diferite de cele pentru cadrele intranzitive).

Prin urmare, definiția consecinței trebuie să se refere la o clasă de structuri.

Consecințe modale

Fie ML un limbaj modal și **S** o clasă de structuri (cadre sau modele) pentru ML.
Dacă **S** este clasă de modele, atunci un model din **S** este pur și simplu un element $\mathcal{M}$ al lui **S**. Dacă **S** este clasă de cadre, atunci un model din **S** este un model bazat pe un cadru din **S**.

Definiția 2.29 (Consecința semantică locală)

Fie Σ o mulțime de formule și φ o formulă. Spunem că φ este consecință semantică locală a lui Σ peste **S** *dacă pentru orice model $\mathcal{M}$ din* **S** *și orice punct w din $\mathcal{M}$,*

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Sigma \quad \textit{implică} \quad \mathcal{M}, w \Vdash \varphi.$$

Notație: $\Sigma \Vdash_{\mathbf{S}} \varphi$

Așadar, dacă Σ este adevărată într-un punct al modelului, atunci φ trebuie să fie adevărată în același punct. De aici vine denumirea de locală.

Consecințe modale

Observație

$$\{\psi\} \Vdash_{\mathbf{S}} \varphi \text{ ddacă } \mathbf{S} \Vdash \psi \to \varphi.$$

Exemplu

Fie ML_0 limbajul modal de bază și *Tran* clasa cadrelor tranzitive. Atunci

$$\{\Diamond\Diamond p\} \Vdash_{Tran} \Diamond p.$$

Dar $\Diamond p$ NU este o consecință semantică locală a lui $\Diamond\Diamond p$ peste clasa tuturor cadrelor.

Putem defini o altă noțiune de consecință semantică.

Definiția 2.30 (Consecința semantică globală)

Fie Σ o mulțime de formule și φ o formulă. Spunem că φ este consecință semantică globală a lui Σ peste **S** *dacă pentru orice structură $\mathcal{S}$ din* **S**,

$$\mathcal{S} \Vdash \Sigma \quad \textit{implică} \quad \mathcal{S} \Vdash \varphi.$$

Notație: $\Sigma \Vdash^{g}_{\mathbf{S}} \varphi$

Aici, în funcție de **S**, $\Vdash$ înseamnă validitate într-un cadru sau adevăr global într-un model.

Relațiile de consecința semantică locală și globală sunt diferite.

Exemplu

Fie ML_0 limbajul modal de bază și **F** clasa tuturor cadrelor. Atunci

- $\Box p$ nu este consecința semantică locală peste **F** a lui p.
- $\{p\} \Vdash^{g}_{\mathbf{F}} \Box p$.

Dem.:

- Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$, unde $W = \{w_1, w_2\}, R = W \times W$, $V(p) = \{w_1\}, V(q)$ arbitrar pentru $q \neq p$. Atunci $\mathcal{M}, w_1 \Vdash p$, dar $\mathcal{M}, w_1 \not\Vdash \Box p$, deoarece Rw_1w_2 și $\mathcal{M}, w_2 \not\Vdash p$.
- Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru a.î. $\mathcal{F} \Vdash p$. Trebuie să arătăm că $\mathcal{F} \Vdash \Box p$, adică: pentru orice model $\mathcal{M}$ bazat pe $\mathcal{F}$ și pentru orice stare w din $\mathcal{M}$,

  $$\text{pentru orice } v \in V, Rwv \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash p.$$

  Fie $v \in W$ a.î. Rwv. Deoarece $\mathcal{F} \Vdash p$, avem că $\mathcal{M} \Vdash p$, deci $\mathcal{M}, v \Vdash p$. $\Box$

SINTAXA

Fie ML_0 limbajul modal de bază.

Definiția 2.31

O logică modală normală este o mulțime Λ de formule din ML_0 care are următoarele proprietăți:

- *Λ conține următoarele axiome:*

$$
\begin{array}{rc}
(Taut) & \text{toate tautologiile propoziționale}, \\
(K) & \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q), \\
(Dual) & \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p,
\end{array}
$$

unde p, q sunt propoziții atomice ale lui ML_0.

Definiția 2.31 (continuare)

- Λ este închisă la următoarele reguli de deducție:
  - modus ponens (MP):
  $$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$
  Prin urmare, dacă $\varphi \in \Lambda$ și $\varphi \to \psi \in \Lambda$, atunci $\psi \in \Lambda$.
  - substituția uniformă:
  $$\frac{\varphi}{\theta} \quad \text{unde } \theta \text{ este o instanță de substituție a lui } \varphi$$
  Prin urmare, dacă $\varphi \in \Lambda$, atunci $\theta \in \Lambda$.
  - generalizarea:
  $$\frac{\varphi}{\Box\varphi}$$
  Prin urmare, dacă $\varphi \in \Lambda$, atunci $\Box\varphi \in \Lambda$.

Fie Λ o logică modală normală.

Lema 2.32

Λ conține, pentru orice formule φ, ψ,

(K') $\quad \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,

(Dual') $\quad \Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$.

Dem.: Fie p, q propoziții atomice. Aplicând (K) și $(Dual)$ obținem că $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \in \Lambda$ și $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p \in \Lambda$. Folosind acum substituția uniformă: $p \mapsto \varphi$, $q \mapsto \psi$, rezultă că $(K') \in \Lambda$ și $(Dual') \in \Lambda$. $\Box$

Vom scrie (K) în loc de (K') și $(Dual)$ în loc de $(Dual')$.

Logici modale normale - tautologii

Adăugăm toate tautologiile propoziționale ca axiome pentru ușurință, dar nu este necesar. Puteam să adăugăm doar un număr mic de tautologii, care le generează pe toate. De exemplu,

$$
\begin{array}{ll}
(A1) & \varphi \to (\psi \to \varphi) \\
(A2) & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \\
(A3) & (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi).
\end{array}
$$

Propoziția 2.33

Orice tautologie propozițională este validă în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0.

Observație

Tautologiile pot conține și modalități. De exemplu, $\Diamond\psi \vee \neg\Diamond\psi$ este tautologie, deoarece are aceeași formă cu $\varphi \vee \neg\varphi$.

Logici modale normale - axioma (K)

Axioma (K) se mai numește și axioma distribuției și este importantă pentru că ne permite să transformăm $\Box(\varphi \to \psi)$ într-o implicație $\Box\varphi \to \Box\psi$, putând astfel să folosim gândirea propozițională. De exemplu, presupunem că vrem să demonstrăm $\Box\psi$ și avem deja o demonstrație care conține atât $\Box(\varphi \to \psi)$ cât și $\Box\varphi$. Atunci aplicând (K) și modus ponens, obținem $\Box\varphi \to \Box\psi$. Aplicând din nou modus ponens, rezultă $\Box\psi$.

Conform Exemplului 2.25,

Propoziția 2.34

(K) *este validă în clasa tuturor cadrelor pentru* ML_0.

Logici modale normale - axioma (Dual)

Axioma (*Dual*) reflectă dualitatea între $\Diamond$ și $\Box$. Este necesară pentru că în ML_0 operatorul modal primitiv este $\Diamond$ și $\Box$ este derivat. Prin urmare, axioma (K) este, în realitate, o abreviere pentru

$$\neg\Diamond\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\Diamond\neg\varphi \to \neg\Diamond\neg\psi).$$

Dacă am fi considerat $\Box$ ca operator primitiv și am fi definit $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$, atunci nu era nevoie să adăugăm (*Dual*).

Propoziția 2.35

(*Dual*) *este validă în clasa tuturor cadrelor pentru* ML_0.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.36

- *modus ponens* *păstrează satisfiabilitatea*: pentru orice model $\mathcal{M}$ și stare $w \in \mathcal{M}$,

$$\text{dacă } \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \to \psi \text{ și } \mathcal{M}, w \Vdash \varphi, \text{ atunci } \mathcal{M}, w \Vdash \psi.$$

- *modus ponens* *păstrează adevărul global*: pentru orice model $\mathcal{M}$,

$$\text{dacă } \mathcal{M} \Vdash \varphi \to \psi \text{ și } \mathcal{M} \Vdash \varphi, \text{ atunci } \mathcal{M} \Vdash \psi.$$

- *modus ponens* *păstrează validitatea*: pentru orice cadru $\mathcal{F}$,

$$\text{dacă } \mathcal{F} \Vdash \varphi \to \psi \text{ și } \mathcal{F} \Vdash \varphi, \text{ atunci } \mathcal{F} \Vdash \psi.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.37

Substituția uniformă păstrează validitatea: pentru orice cadru $\mathcal{F}$, dacă θ este o instanță de substituție a lui φ, atunci

$$\mathcal{F} \Vdash \varphi \quad \textit{implică} \quad \mathcal{F} \Vdash \theta.$$

Dem.: Exercițiu.

Observație

Substituția uniformă NU păstrează satisfiabilitatea sau adevărul global.

Dem.: De exemplu, $\theta := q$ se obține prin substituție uniformă din $\varphi := p$, dar din faptul că p este global adevărată într-un model $\mathcal{M}$ nu rezultă că q este global adevărată în $\mathcal{M}$.

Logici modale normale - generalizarea

Generalizarea "modalizează" formulele, adăugându-le $\Box$ în față. Dacă axioma (K) ne permite să aplicăm raționamente clasice în context modal, generalizarea creează noi contexte modale în care să lucrăm.

Propoziția 2.38

- *Generalizarea păstrează adevărul global: pentru orice model $\mathcal{M}$,*

$$\mathcal{M} \Vdash \varphi \quad \textit{implică} \quad \mathcal{M} \Vdash \Box\varphi.$$

- *Generalizarea păstrează validitatea: pentru orice cadru $\mathcal{F}$,*

$$\mathcal{F} \Vdash \varphi \quad \textit{implică} \quad \mathcal{F} \Vdash \Box\varphi.$$

Dem.: Exercițiu.

Observație

Generalizarea NU păstrează satisfiabilitatea.

Teorema 2.39

Pentru orice clasă **F** *de cadre, logica* $\Lambda_{\mathbf{F}}$ *a lui* **F** *este o logică modală normală.*

Dem.: Se obține imediat din rezultatele anterioare.

Lema 2.40

- *Colecția tuturor formulelor este o logică modală normală, numită logica inconsistentă.*
- *Dacă* $\{\Lambda_i \mid i \in I\}$ *este o colecție de logici modale normale, atunci* $\bigcap_{i \in I} \Lambda_i$ *este o logică modală normală.*

Definiția 2.41

K *este intersecția tuturor logicilor modale normale.*

Logica **K**

Definiția 2.42

O **K***-demonstrație este o secvență de formule* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *a.î. pentru fiecare* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, una din următoarele condiții este satisfăcută:*

- θ_i *este axiomă (adică tautologie,* (K) *sau* $(Dual)$*);*
- θ_i *se obține din formule anterioare aplicând următoarele reguli de deducție: modus ponens, substituția uniformă sau generalizarea.*

Definiția 2.43

Fie φ *o formulă. O* **K***-demonstrație a lui* φ *este o* **K***-demonstrație* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *a.î.* $\theta_n = \varphi$*.*
Dacă φ *are o* **K***-demonstrație, spunem că* φ *este* **K***-demonstrabilă și scriem* $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$*.*

Exemplul 2.44

Pentru orice $p, q \in PROP$, $\vdash_{\mathbf{K}} \Box p \wedge \Box q \to \Box(p \wedge q)$.

Dem.: Prezentăm următoarea **K**-demonstrație:

(1) $\vdash_{\mathbf{K}} p \to (q \to (p \wedge q))$ tautologie

(2) $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(p \to (q \to (p \wedge q)))$ generalizare: (1)

(3) $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ axioma (K)

(4) $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(p \to (q \to (p \wedge q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q)))$
substituție uniformă: (3), $q \mapsto (q \to (p \wedge q))$

(5) $\vdash_{\mathbf{K}} \Box p \to \Box(q \to (p \wedge q))$ MP: (2), (4)

(6) $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(q \to (p \wedge q)) \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$
substituție uniformă: (3), $p \mapsto q, q \mapsto (p \wedge q)$

(7) $\vdash_{\mathbf{K}} \Box p \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$
logică propozițională: (5),(6) și MP,
$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ tautologie

(8) $\vdash_{\mathbf{K}} \Box p \wedge \Box q \to \Box(p \wedge q)$
logică propozițională: (7) și MP,
$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$ tautologie. $\Box$

Teorema 2.45

$$\mathbf{K} = \{\varphi \mid \vdash_{\mathbf{K}} \varphi\}.$$

Logica **K** este foarte slabă. Dacă suntem interesați de cadre tranzitive, am dori să avem un sistem de demonstrație care reflectă acest lucru. De exemplu, știm că $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ este validă în clasa tuturor cadrelor tranzitive, prin urmare, ar fi de dorit un sistem de demonstrație care generează această formulă.
K nu poate face asta, deoarece $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ nu este validă în clasa tuturor cadrelor.

Ideea este de a extinde **K** cu axiome adiționale.

Logica **K**Γ

Conform Lemei 2.40, pentru orice mulțime de formule Γ, există cea mai mică logică modală normală care conține Γ.

Definiția 2.46

KΓ *este cea mai mică logică modală normală care conține* Γ*.*
Spunem că **K**Γ *este generată de* Γ *sau că este axiomatizată de* Γ*.*

Definiția 2.47

O **K**Γ*-demonstrație este o secvență de formule* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *a.î. pentru fiecare* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, una din următoarele condiții este satisfăcută:*

- θ_i *este axiomă (adică tautologie,* (K) *sau* $(Dual)$*);*
- $\theta_i \in \Gamma$*;*
- θ_i *se obține din formule anterioare aplicând următoarele reguli de deducție: modus ponens, substituția uniformă sau generalizarea.*

Logica $\mathbf{K}\Gamma$

Definiția 2.48

Fie φ o formulă. O $\mathbf{K}\Gamma$*-demonstrație a lui φ este o* $\mathbf{K}\Gamma$*-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$.*
Dacă φ are o $\mathbf{K}\Gamma$*-demonstrație, spunem că φ este* $\mathbf{K}\Gamma$*-demonstrabilă și scriem $\vdash_{\mathbf{K}\Gamma} \varphi$.*

Teorema 2.49

$$\mathbf{K}\Gamma = \{\varphi \mid \vdash_{\mathbf{K}\Gamma} \varphi\}.$$

Exemplu

De exemplu, dacă extindem $\mathbf{K}$ adăugând $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ ca axiomă, obținem logica $\mathbf{K}4$.

În continuare, în limbajul de bază $ML_0 := ML(PROP, \tau_0)$, mulțimea $PROP$ este numărabilă. Fie Λ o logică modală normală.

Definiția 2.50

Dacă $\varphi \in \Lambda$, spunem și că φ este Λ-teoremă sau teoremă a lui Λ și scriem $\vdash_\Lambda \varphi$. Dacă $\varphi \notin \Lambda$, scriem $\not\vdash_\Lambda \varphi$.

Cu aceste notații, condițiile din definiția unei logici normale se scriu astfel:
Pentru orice formule φ, ψ, θ, au loc următoarele:

(i) Dacă φ este tautologie, atunci $\vdash_\Lambda \varphi$.

(ii) $\vdash_\Lambda (K)$ și $\vdash_\Lambda (Dual)$.

(iii) Dacă $\vdash_\Lambda \varphi$ și $\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$, atunci $\vdash_\Lambda \psi$.

(iv) Dacă $\vdash_\Lambda \varphi$ și θ este instanță de substituție a lui φ, atunci $\vdash_\Lambda \theta$.

(v) Dacă $\vdash_\Lambda \varphi$, atunci $\vdash_\Lambda \Box\varphi$.

Definiția 2.51

Fie $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi$ formule în ML_0. Spunem că φ este deductibilă în logica propozițională din asumpțiile $\psi_1, \ldots, \psi_n$ dacă

$$(\psi_1 \land \ldots \land \psi_n) \to \varphi \text{ este tautologie.}$$

Propoziția 2.52

Λ este închisă la deducția propozițională: dacă φ este deductibilă în logica propozițională din asumpțiile $\psi_1, \ldots, \psi_n$, atunci

$$\vdash_\Lambda \psi_1, \ldots, \vdash_\Lambda \psi_n \quad \text{implică} \quad \vdash_\Lambda \varphi.$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.53

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *o mulțime de formule în* ML_0. *Spunem că* φ *este* *deductibilă în* Λ *din* Γ *sau că* φ *este* Λ*-deductibilă din* Γ *dacă există formule* $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ $(n \geq 0)$ *a.î.*

$$\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi.$$

(În cazul $n = 0$, *aceasta înseamnă că* $\vdash_\Lambda \varphi$*).*

Notație: $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$.

Scriem $\Gamma \not\vdash_\Lambda \varphi$ dacă φ nu este Λ-deductibilă din Γ.

Observație

Următoarele sunt echivalente:

(i) $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$.

(ii) există formule $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ $(n \geq 0)$ a.î.

$$\vdash_\Lambda \psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi).$$

Dem.: $(i) \Rightarrow (ii)$

(1) $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$ (i)

(2) $\vdash_\Lambda ((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi) \to (\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi)))$
tautologie

(3) $\vdash_\Lambda \psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi))$ (MP): (1),(2).

$(ii) \Rightarrow (i)$

(1) $\vdash_\Lambda \psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi))$ (ii)

(2) $\vdash_\Lambda (\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi))) \to ((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi)$
tautologie

(3) $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$ (MP): (1),(2). $\square$

Propoziția 2.54 (Proprietăți imediate)

Fie φ o formulă și Γ, Δ mulțimi de formule.

(i) $\emptyset \vdash_\Lambda \varphi$ *ddacă* $\vdash_\Lambda \varphi$.

(ii) $\vdash_\Lambda \varphi$ *implică* $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$.

(iii) $\varphi \in \Gamma$ *implică* $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$.

(iv) *Dacă* $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ *și* $\Gamma \subseteq \Delta$, *atunci* $\Delta \vdash_\Lambda \varphi$.

(v) $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ *ddacă există o submulțime finită* Σ *a lui* Γ *a.î.* $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.55

(i) *Dacă* $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ *și* ψ *este deductibilă în logica propozițională din* φ, *atunci* $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$.

(ii) *Dacă* $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ *și* $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \to \psi$, *atunci* $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$.

(iii) *Dacă* $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ *și* $\{\varphi\} \vdash_\Lambda \psi$, *atunci* $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.56 (Teorema deducției)

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ,

$$\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \to \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_\Lambda \psi.$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.57

O mulțime de formule Γ se numește Λ-consistentă dacă $\Gamma \not\vdash_\Lambda \bot$.
Dacă Γ nu este Λ-consistentă, spunem că Γ este Λ-inconsistentă.
O formulă φ este Λ-consistentă dacă $\{\varphi\}$ este; altfel se numește Λ-inconsistentă.

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

(i) Dacă Δ este Λ-consistentă, atunci și Γ este Λ-consistentă.

(ii) Dacă Γ este Λ-inconsistentă, atunci și Δ este Λ-inconsistentă.

Propoziția 2.58

Pentru o mulțime de formule Γ *sunt echivalente:*

(i) Γ *este* Λ*-inconsistentă.*

(ii) *Există o formulă* ψ *a.î.* $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$ *și* $\Gamma \vdash_\Lambda \neg\psi$*.*

(iii) $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ *pentru orice formulă* φ*.*

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.59

(i) $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *este* Λ*-inconsistentă.*

(ii) $\Gamma \vdash_\Lambda \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ *este* Λ*-inconsistentă.*

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.60

Γ *este* Λ*-consistentă ddacă orice submulțime finită a lui* Γ *este* Λ*-consistentă.*

Logici modale normale

În continuare, când Λ este clară din context, spunem simplu "teoreme", "deductibilă", "consistentă" sau "inconsistentă" și scriem $\vdash \varphi$, $\Gamma \vdash \varphi$, ...

De asemenea, vom spune "logică normală" în loc de "logică modală normală".

Fie **S** o clasă de structuri (cadre sau modele) pentru ML_0.

Notație:

$$\Lambda_{\mathbf{S}} := \{\varphi \mid \mathcal{S} \Vdash \varphi \text{ pentru orice structură } \mathcal{S} \text{ din } \mathbf{S}\}.$$

Definiția 2.61

*O logică normală Λ este corectă (sound) cu privire la **S** dacă $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathbf{S}}$.*

Așadar, Λ este corectă cu privire la **S** ddacă pentru orice formulă φ și pentru orice structură $\mathcal{S}$ din **S**,

$$\vdash_\Lambda \varphi \quad \text{implică} \quad \mathcal{S} \Vdash \varphi.$$

Dacă Λ este corectă cu privire la **S**, spunem și că **S** este o clasă de cadre (sau modele) pentru Λ.

Teorema 2.62 (Teorema de corectitudine pentru **K***)*

K *este corectă cu privire la clasa tuturor cadrelor.*

Dem.: Aplicăm Teorema 2.39 și faptul că **K** este cea mai mică logică normală. □.

Fie **S** o clasă de structuri (cadre sau modele) pentru ML_0.

Definiția 2.63

O logică normală Λ este

- *tare completă (strongly complete) cu privire la **S** dacă pentru orice mulțime de formule $\Gamma \cup \{\varphi\}$,*
$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{S}} \varphi \quad \textit{implică} \quad \Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi.$$
- *(slab) completă (weakly complete) cu privire la **S** dacă pentru orice formulă φ,*
$$\mathbf{S} \Vdash \varphi \quad \textit{implică} \quad \vdash_{\Lambda} \varphi.$$

Λ este tare (slab) completă cu privire la o singură structură $\mathcal{S}$ dacă este tare (slab) completă cu privire la clasa $\mathbf{S} := \{\mathcal{S}\}$.

Scriem, de obicei, "completă" în loc de "slab completă".

Evident, completitudinea este un caz particular al completitudinii tari, în care $\Gamma = \emptyset$. Prin urmare, completitudinea tare cu privire la o clasă de cadre implică completitudinea cu privire la acea clasă. Reciproca nu este adevărată.

Observație

Λ este completă cu privire la $\mathbf{S}$ ddacă $\Lambda_{\mathbf{S}} \subseteq \Lambda$.

Așadar, dacă demonstrăm că o logică normală Λ (specificată sintactic) este atât corectă cât și completă cu privire la o clasă de cadre $\mathbf{S}$, obținem o potrivire perfectă între perspectiva sintactică și cea semantică: $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{S}}$.

Fiind dată o logică normală $\Lambda_{\mathbf{S}}$ (specificată semantic), o problemă foarte importantă este găsirea unei mulțimi cât mai simple de formule Γ astfel încât $\Lambda_{\mathbf{S}}$ este logica generată de Γ (spunem și că Γ axiomatizează $\Lambda_{\mathbf{S}}$).

Fie **S** o clasă de structuri pentru ML_0 și Λ o logică normală.

Propoziția 2.64

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) *Λ este tare completă cu privire la* **S**.

(ii) *Orice mulțime de formule Λ-consistentă este satisfiabilă într-un model $\mathcal{M}$ din* **S**.

Dem.: (i)$\Rightarrow$(ii) Fie Γ o mulțime Λ-consistentă. Presupunem că Γ nu este satisfiabilă într-un model $\mathcal{M}$ din **S**, deci nu există un model $\mathcal{M}$ din **S** și o stare $w \in \mathcal{M}$, a.î. $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$. Atunci $\Gamma \Vdash_{\mathbf{S}} \bot$. Deoarece Λ este tare completă cu privire la **S**, rezultă că $\Gamma \vdash_\Lambda \bot$. Am obținut că Γ este Λ-inconsistentă, o contradicție.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Fie $\Gamma \cup \{\varphi\}$ o mulțime de formule a.î. $\Gamma \Vdash_{\mathbf{S}} \varphi$. Se observă imediat că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este satisfiabilă în niciun model din **S** (pentru orice model $\mathcal{M}$ din **S** și orice stare w din $\mathcal{M}$, dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$, atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$, deci $\mathcal{M}, w \nVdash \neg\varphi$). Rezultă din (ii) că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este Λ-inconsistentă. Aplicăm Propoziția 2.59 pentru a conclude că $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$. $\square$

Corolar 2.65

*Λ este slab completă cu privire la **S** ddacă orice formulă Λ-consistentă este satisfiabilă într-un model $\mathcal{M}$ din **S**.*

Dem.: Exercițiu.

Logici modale normale - completitudine

Mesajul Propoziției 2.64 este: teoremele de completitudine sunt teoreme de existență de modele. Demonstrăm completitudinea tare a unei logici normale Λ cu privire la o clasă de structuri arătând că orice mulțime de formule Λ-consistentă are un model în acea clasă. Prin urmare, întrebarea fundamentală este:

cum construim modelele potrivite?

În continuare dăm un răspuns la această întrebare:

construim modele folosind mulțimi maximal consistente, mai precis modele canonice.

Fie Λ o logică normală.

Definiția 2.66

O mulțime de formule Γ se numește maximal Λ-consistentă dacă Γ este Λ-consistentă și pentru orice mulțime de formule Δ,

$$\text{dacă } \Gamma \subseteq \Delta \text{ și } \Delta \text{ este } \Lambda\text{-consistentă, atunci } \Delta = \Gamma.$$

Notație:

Scriem Λ-MCS în loc de "maximal Λ-consistentă". Când Λ este clară din context, scriem simplu MCS.

Propoziția 2.67

Fie Γ o mulțime Λ-consistentă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) *Γ este Λ-MCS.*

(ii) *Pentru orice formulă φ, dacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este Λ-consistentă, atunci $\varphi \in \Gamma$.*

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.68

Mulțime $Form(ML_0)$ a formulelor lui ML_0 este numărabilă.

Propoziția 2.69 (Lema lui Lindenbaum)

Dacă Γ este o mulțime de formule Λ-consistentă, atunci există o Λ-MCS Γ^+ astfel încât $\Gamma \subseteq \Gamma^+$.

Dem.: Fie $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ o enumerare a formulelor lui ML_0. Definim inductiv următorul șir de mulțimi:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_0 & = & \Gamma, \\ \Gamma_{n+1} & = & \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{dacă } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ este consistentă} \\ \Gamma_n & \text{altfel} \end{cases} \end{array}$$

Prin construcție, $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \ldots \Gamma_n \subseteq \ldots$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, Γ_n este consistentă. Fie

$$\Gamma^+ = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n.$$

Afirmația 1: Γ^+ este consistentă.

Demonstrația afirmației Presupunem că Γ^+ nu este consistentă. Conform Propoziției 2.60, Γ^+ are o submulțime finită inconsistentă $\Delta = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k\}$. Pentru orice $i = 1, \ldots, k$ exista $N_i \in \mathbb{N}$ a.î. $\psi_i \in \Gamma_{N_i}$. Fie $N := max\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$. Atunci $\Delta \subseteq \Gamma_N$, prin urmare Γ_N este inconsistentă. Am obținut o contradicție.

Afirmația 2: Γ^+ este MCS.

Demonstrația afirmației Fie ψ o formulă a.î. $\Gamma^+ \cup \{\psi\}$ este consistentă. Fie r cel mai mic indice cu $\varphi_r = \psi$. Atunci $\Gamma_r \cup \{\psi\}$ este consistentă, deoarece $\Gamma_r \cup \{\psi\} = \Gamma_r \cup \{\varphi_r\} \subseteq \Gamma^+ \cup \{\varphi_r\} =$ $= \Gamma^+ \cup \{\psi\}$. Prin urmare, $\Gamma_{r+1} = \Gamma_r \cup \{\psi\}$. Rezultă că $\psi \in \Gamma_{r+1} \subseteq \Gamma^+$. $\square$

Propoziția 2.70

Fie Γ o Λ-MCS.

(i) Γ *este închisă la modus ponens: dacă* $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$, *atunci* $\psi \in \Gamma$.

(ii) $\Lambda \subseteq \Gamma$.

(iii) *Pentru orice formulă* φ, *exact una din următoarele are loc:* $\varphi \in \Gamma$ *sau* $\neg\varphi \in \Gamma$ *(echivalent,* $\varphi \in \Gamma$ *ddacă* $\neg\varphi \notin \Gamma$*).*

(iv) *Pentru orice formulă* φ,

$$\varphi \in \Gamma \text{ ddacă } \Gamma \vdash_\Lambda \varphi.$$

(v) *Pentru orice formule* φ, ψ,

$$\varphi \to \psi \in \Gamma \text{ ddacă } (\varphi \in \Gamma \text{ implică } \psi \in \Gamma).$$

Dem.: Exercițiu.

Modele canonice

Suntem acum pregătiți să construim modele cu ajutorul MCS și, în particular, să definim modelul special numit model canonic. Cu ajutorul acestor structuri, vom demonstra Teorema Modelului Canonic, un rezultat esențial pentru a obține completitudinea logicilor normale.

Într-o formă sau alta, un astfel de rezultat stă la baza majorității rezultatelor de completitudine modală.

Fie Λ o logică normală.

Definiția 2.71

Modelul canonic al lui Λ este tripletul $\mathcal{M}^\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$, unde

- *W^Λ este mulțimea tuturor Λ-MCS;*
- *R^Λ este relația binară pe W^Λ definită astfel: pentru orice $w, v \in W^\Lambda$, $R^\Lambda wv$ ddacă pentru orice formulă φ,*

  $$\varphi \in v \text{ implică } \Diamond\varphi \in w.$$

  R^Λ se numește relația canonică.
- *V^Λ este evaluarea definită astfel:*

  $$V^\Lambda(p) = \{w \in W^\Lambda \mid p \in w\}.$$

  V^Λ se numește evaluarea canonică.

Perechea $\mathcal{F}^\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda)$ se numește cadrul canonic pentru Λ.

Propoziția 2.72 (Lema existenței)

Fie $w \in W^\Lambda$. Dacă φ este o formulă care satisface $\Diamond\varphi \in w$, atunci există o stare $v \in W^\Lambda$ a.î. $R^\Lambda wv$ și $\varphi \in v$.

Conform definiției modelului canonic, pentru orice propoziție atomică p, avem că p este adevărată într-un punct w din M^Λ ddacă $p \in w$. Lema adevărului extinde această ecuație "adevăr=apartenență" la formule arbitrare.

Propoziția 2.73 (Lema adevărului)

Fie $w \in W^\Lambda$. Pentru orice formulă φ,

$$\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \varphi \in w.$$

Dem.: Prin inducție după φ.

- $\varphi = p \in PROP$. Atunci $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash p$ ddacă $w \in V^\Lambda(p)$ ddacă $\varphi \in w$.

- $\varphi = \bot$. Evident, deoarece $\mathcal{M}^\Lambda, w \not\Vdash \bot$ și $\bot \notin w$.
- $\varphi = \neg\psi$. Obținem că $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \neg\psi$ ddacă $\mathcal{M}^\Lambda, w \not\Vdash \psi$ ddacă $\psi \notin w$ (din ipoteza de inducție pentru ψ) ddacă $\neg\psi \in w$ (conform Propoziției 2.70.(iii)).
- $\varphi = \psi \to \chi$. Obținem că $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \psi \to \chi$ ddacă $\big(\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \psi$ implică $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \chi\big)$ ddacă $\big(\psi \in w$ implică $\chi \in w\big)$ (din ipoteza de inducție pentru ψ,χ) ddacă $\psi \to \chi \in w$ (conform Propoziției 2.70.(iv)).

Modele canonice - Lema adevărului

- $\varphi = \Diamond\psi$.

  $\Rightarrow$ Presupunem că $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \Diamond\psi$. Aplicând definiția satisfacerii și ipoteza de inducție pentru ψ, rezultă că

  $$\text{există } v \in W^\Lambda \text{ a.î. } R^\Lambda wv \text{ și } \psi \in v.$$

  Conform definiției lui R^Λ, rezultă că $\Diamond\psi \in w$.

  $\Leftarrow$ Presupunem că $\Diamond\psi \in w$. Aplicând Lema existenței, rezultă că există $v \in W^\Lambda$ a.î. $R^\Lambda wv$ și $\psi \in v$. Conform ipotezei de inducție pentru ψ, obținem că există $v \in W^\Lambda$ a.î. $R^\Lambda wv$ și $\mathcal{M}^\Lambda, v \Vdash \psi$. Prin urmare, $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \Diamond\psi$. $\square$

Teorema 2.74 (Teorema modelului canonic - versiunea 1)

Orice mulțime Λ-consistentă este satisfiabilă în modelul canonic $\mathcal{M}^\Lambda$ al lui Λ.

Dem.: Fie Γ o mulțime Λ-consistentă. Conform Lemei lui Lindenbaum, există $w \in W^\Lambda$ a.î. $\Gamma \subseteq w$. Din Lema adevărului rezultă că pentru orice $\varphi \in \Gamma$ avem că $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \varphi$. Așadar, $\mathcal{M}^\Lambda, w \Vdash \Gamma$. □

Aplicând Propoziția 2.64, rezultă

Teorema 2.75 (Teorema modelului canonic - versiunea 2)

Orice logică normală Λ este tare completă cu privire la modelul său canonic $\mathcal{M}^\Lambda$.

Rezultatele de mai sus sunt stau la baza obținerii de teoreme de completitudine pentru diverse logici normale cu privire la diverse clase de cadre.

Teorema 2.76

K *este tare completă cu privire la clasa tuturor cadrelor pentru ML_0.*

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.64. Fie Γ o mulțime **K**-consistentă de formule. Trebuie să găsim un model $\mathcal{M}$ în care Γ este satisfiabilă. Conform Teoremei 2.74, putem lua $\mathcal{M} := \mathcal{M}^{\mathbf{K}}$, modelul canonic al lui **K**. $\square$

Teorema 2.77

K *este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor pentru ML_0.*

Dem.: Aplicăm teorema precedentă și Teorema 2.62. $\square$.

Logica **K4**

Fie

$$(4) \quad \Diamond\Diamond p \to \Diamond p.$$

Vom folosi notația **K4** pentru logică modală normală generată de (4). Prin urmare, **K4** este cea mai mică logică modală normală care conține (4).

Modelul canonic al logicii **K4** este $\mathcal{M}^{\mathbf{K4}} = (W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}}, V^{\mathbf{K4}})$ și cadrul canonic este $\mathcal{F}^{\mathbf{K4}} = (W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}})$.

Din Teorema 2.74 rezultă

Propoziția 2.78

Orice mulțime **K4***-consistentă este satisfiabilă în modelul canonic* $\mathcal{M}^{\mathbf{K4}}$.

Logica **K4**

Propoziția 2.79

Cadrul canonic $\mathcal{F}^{\mathbf{K4}} = (W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}})$ *este tranzitiv.*

Dem.: Fie $w, v, u \in W^{\mathbf{K4}}$ a.î $R^{\mathbf{K4}}wv$ și $R^{\mathbf{K4}}vu$. Trebuie să arătăm că $R^{\mathbf{K4}}wu$, adică

$$\text{pentru orice formulă } \varphi,\ \varphi \in u \text{ implică } \Diamond\varphi \in w.$$

Fie $\varphi \in u$ o formulă. Deoarece $R^{\mathbf{K4}}vu$, rezultă că $\Diamond\varphi \in v$. Deoarece $R^{\mathbf{K4}}wv$, rezultă că $\Diamond\Diamond\varphi \in w$. Cum w este o **K4**-MCS, avem, conform Propoziției 2.70.(ii), că $\mathbf{K4} \subseteq w$. În particular, $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi \in w$. Aplicăm acum modus ponens (Propoziția 2.70.(i)) pentru a conclude că $\Diamond\varphi \in w$. $\square$.

Observație

Putem obține, adaptând demonstrația de mai sus, un rezultat mai general, și anume: cadrul canonic al oricărei logici normale care conține (4) este tranzitiv.

Teorema 2.80

K4 *este tare completă cu privire la Tran, clasa tuturor cadrelor tranzitive pentru* ML_0.

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.64. Fie Γ o mulțime **K4**-consistentă de formule. Conform Teoremei 2.74, Γ este satisfiabilă în $\mathcal{M}^{\mathbf{K4}}$. Aplicând Propoziția 2.79, obținem că $\mathcal{F}^{\mathbf{K4}} \in Tran$. $\square$

Teorema 2.81

$\mathbf{K4} = \Lambda_{Tran}$.

Dem.: "$\subseteq$" Din Teorema 2.39 și Exemplul 2.28 obținem că Λ_{Tran} este o logică normală care conține (4). Prin urmare, $\mathbf{K4} \subseteq \Lambda_{Tran}$.
"$\supseteq$" Rezultă imediat din Teorema 2.80 că **K4** este completă cu privire la *Tran*. Deci, $\mathbf{K4} \supseteq \Lambda_{Tran}$. $\square$

Prin urmare, **K4** este corectă și completă privire la *Tran*.

Logica **T**

Fie

$$(T) \quad p \to \Diamond p.$$

Vom folosi notația **T** pentru logică normală generată de (T).

Definiția 2.82

Spunem că un cadru $\mathcal{F} = (W, R)$ pentru ML_0 este reflexiv dacă R este reflexivă.

Propoziția 2.83

(T) *este validă în clasa tuturor cadrelor reflexive.*

Dem.: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru reflexiv, w o stare din $\mathcal{F}$ și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe $\mathcal{F}$. Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash p$. Deoarece R este reflexivă, rezultă că Rww și $\mathcal{M}, w \Vdash p$. Deci, $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$. $\square$

Modelul canonic al logicii **T** este $\mathcal{M}^{\mathbf{T}} = (W^{\mathbf{T}}, R^{\mathbf{T}}, V^{\mathbf{T}})$ și cadrul canonic este $\mathcal{F}^{\mathbf{T}} = (W^{\mathbf{T}}, R^{\mathbf{T}})$.

Din Teorema 2.74 rezultă

Propoziția 2.84

Orice mulțime **T***-consistentă este satisfiabilă în modelul canonic* $\mathcal{M}^{\mathbf{T}}$*.*

Propoziția 2.85

Cadrul canonic $\mathcal{F}^{\mathbf{T}} = (W^{\mathbf{T}}, R^{\mathbf{T}})$ *este reflexiv.*

Dem.: Fie $w \in W^{\mathbf{T}}$. Trebuie să arătăm că $R^{\mathbf{T}}ww$, adică

$$\text{pentru orice formulă } \varphi,\ \varphi \in w \text{ implică } \Diamond\varphi \in w.$$

Fie $\varphi \in w$ o formulă. Deoarece w este o **T**-MCS, avem, conform Propoziției 2.70.(ii), că $\mathbf{T} \subseteq w$. În particular $\varphi \to \Diamond\varphi \in w$. Aplicăm acum modus ponens (Propoziția 2.70.(i)) pentru a conclude că $\Diamond\varphi \in w$. $\square$.

Teorema 2.86

T *este tare completă cu privire la clasa tuturor cadrelor reflexive pentru* ML_0.

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.64. Fie Γ o mulțime **T**-consistentă de formule. Conform Teoremei 2.74, Γ este satisfiabilă în $\mathcal{M}^{\mathbf{T}}$. Aplicăm acum Propoziția 2.85. □

Teorema 2.87

T *este corectă și completă privire la clasa tuturor cadrelor reflexive pentru* ML_0.

Dem.: Aplicăm teorema precedentă și Propoziția 2.83.