

## Seminar 1

(S1.1) Considerăm limbajul de ordinul I  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$  (limbajul aritmeticii) și  $\mathcal{L}_{ar}$ -structura  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ .

- (i) Fie  $x, y \in V$  cu  $x \neq y$ , și  $t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$ . Să se calculeze  $t^{\mathcal{N}}(e)$ , unde  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$  este o evaluare ce verifică  $e(x) = 3$  și  $e(y) = 7$ .
- (ii) Fie  $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \rightarrow (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \rightarrow (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$ . Să se arate că  $\mathcal{N} \models \varphi[e]$  pentru orice  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ .

### Demonstrație:

- (i) Pentru orice interpretare  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ , avem

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă  $e(x) = 3$  și  $e(y) = 7$ , atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

- (ii) Pentru orice interpretare  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ , avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau} \\ &\quad \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (x = y)[e] \\ &\iff <(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x), e(y)) \\ &\quad \text{sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

Prin urmare,  $\mathcal{N} \models \varphi[e]$  pentru orice  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ .

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

□

**Notație 1.** Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul  $I$ . Pentru orice variabile  $x, y$  cu  $x \neq y$ , orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ , orice  $e : V \rightarrow A$  și orice  $a, b \in A$ , avem că:

$$(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (e_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu  $e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$ . Așadar,

$$e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b} : V \rightarrow A, \quad e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ și } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

**(S1.2)** Să se arate că pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabile  $x, y$  cu  $x \neq y$  avem,

- (i)  $\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi$ ;
- (ii)  $\forall x (\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$ ;
- (iii)  $\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi$ ;
- (iv)  $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi$ .

**Demonstrație:** Fie  $\mathcal{A}$  și  $e : V \rightarrow A$ .

- (i) Știm că “ $\exists x$ ” este o prescurtare pentru “ $\neg \forall x \neg$ ”.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\neg \exists x \varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \models (\neg \neg \forall x \neg \varphi)[e] \iff \text{nu este adevărat că } \mathcal{A} \models (\neg \forall x \neg \varphi)[e] \\ &\iff \text{nu este adevărat că nu este adevărat că } \mathcal{A} \models (\forall x \neg \varphi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x \neg \varphi)[e]. \end{aligned}$$

- (ii)  $\mathcal{A} \models (\forall x (\varphi \wedge \psi))[e] \iff$  pentru orice  $a \in A$ , avem  $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$  pentru orice  $a \in A$ , avem  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$  și  $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$  (pentru orice  $a \in A$ , avem  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ ) și (pentru orice  $a \in A$ , avem  $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]$ )  $\iff \mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e]$  și  $\mathcal{A} \models (\forall x \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)[e]$ .

(iii) Avem că  $\mathcal{A} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff$  există  $b \in A$  a.î. pentru orice  $a \in A$  avem  $\mathcal{A} \models \varphi[(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a}]$ , i.e., folosind ipoteza că  $x \neq y$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}]$  (\*).

Pe de altă parte,  $\mathcal{A} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff$  pentru orice  $c \in A$  există  $d \in A$  a.î.  $\mathcal{A} \models \varphi[(e_{x \leftarrow c})_{y \leftarrow d}]$ , i.e., folosind ipoteza că  $x \neq y$ ,  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$  (\*\*).

Știm (\*) și vrem să arătăm (\*\*). Fie  $c \in A$ . Vrem  $d \in A$  a.î.  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$ .

Luăm  $d$  să fie  $b$ -ul din (\*). Atunci, pentru orice  $a \in A$  avem  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow d}]$ . În particular, luând  $a := c$ , obținem  $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$ , ceea ce ne trebuia.

(iv) Presupunem că  $\mathcal{A} \models (\forall x (\varphi \rightarrow \psi))[e]$ . Atunci, pentru orice  $a \in A$ ,  $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \leftarrow a}]$ , lucru pe care îl putem scrie și  $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1$  sau chiar  $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a})$  (\*).

Vrem să arătăm că  $\mathcal{A} \models (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)[e]$ , ceea ce este echivalent, din aceleași considerente, cu  $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e)$ .

Dacă  $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$ , suntem OK. Presupunem, așadar, că  $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$ , i.e. pentru orice  $b \in A$ ,  $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = 1$  (\*\*).

Ne rămâne de arătat că  $(\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$ , i.e. că pentru orice  $c \in A$ ,  $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$ . Fie  $c \in A$ . Din (\*), avem că  $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c})$ , iar din (\*\*), că  $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$ . Deci  $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$ , ceea ce ne trebuia.

□

**(S1.3)** Fie  $x, y$  variabile cu  $x \neq y$ . Să se dea exemple de limbaj de ordinul I,  $\mathcal{L}$ , și de formule  $\varphi, \psi$  ale lui  $\mathcal{L}$  astfel încât:

(i)  $\forall x (\varphi \vee \psi) \not\models \forall x \varphi \vee \forall x \psi$ ;

(ii)  $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \not\models \exists x (\varphi \wedge \psi)$ ;

(iii)  $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$ .

**Demonstrație:** Considerăm  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ ,  $\mathcal{L}_{ar}$ -structura  $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$  și  $e : V \rightarrow \mathbb{N}$  o evaluare arbitrară (să zicem, punem  $e(v) := 7$  pentru orice  $v \in V$ ).

(i) Fie  $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$ ,  $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$  și  $\psi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$ . Atunci

$$\mathcal{N} \models \forall x (\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

- (a)  $\mathcal{N} \models (\forall x\varphi)[e] \iff$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  avem  $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n}] \iff$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , avem  $n < 2$ , ceea ce nu este adevărat (luând  $n := 3$ , de exemplu). Deci,  $\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi)[e]$ .
- (b)  $\mathcal{N} \models (\forall x\psi)[e] \iff$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  avem  $\mathcal{N} \models \psi[e_{x \leftarrow n}] \iff$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , avem  $n \geq 2$ , ceea ce nu este adevărat (luând  $n := 1$ , de exemplu). Deci,  $\mathcal{N} \not\models (\forall x\psi)[e]$ .

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie  $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$ ,  $\varphi := x < \dot{2}$  și  $\psi := \neg(x < \dot{2})$ . Avem:

- (a)  $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi)[e] \iff$  există  $n \in \mathbb{N}$  a.î.  $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n}] \iff$  există  $n \in \mathbb{N}$  a.î.  $n < 2$ , ceea ce este adevărat (luând  $n := 1$ , de exemplu). Deci,  $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi)[e]$ .
- (b)  $\mathcal{N} \models (\exists x\psi)[e] \iff$  există  $n \in \mathbb{N}$  a.î.  $\mathcal{N} \models \psi[e_{x \leftarrow n}] \iff$  există  $n \in \mathbb{N}$  a.î.  $n \geq 2$ , ceea ce este adevărat (luând  $n := 3$ , de exemplu). Deci,  $\mathcal{N} \models (\exists x\psi)[e]$ .

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte,  $\mathcal{N} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] \iff$  există  $n \in \mathbb{N}$  a.î.  $\mathcal{N} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow n}] \iff$  există  $n \in \mathbb{N}$  a.î.  $n < 2$  și  $n \geq 2$ , ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models \exists x(\varphi \wedge \psi)[e].$$

(iii) Fie  $\varphi := x < y$ . Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x\exists y\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \mathcal{N} \models (\exists y\varphi)[e_{x \leftarrow n}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă,  $m := n + 1$ . Așadar,

$$\mathcal{N} \models (\forall x\exists y\varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\exists y\forall x\varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models (\forall x\varphi)[e_{y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{avem } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Așadar,

$$\mathcal{N} \not\models (\exists y\forall x\varphi)[e].$$

□