FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Seminar 2

(S2.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
\forall x(\varphi \wedge \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \wedge \forall x\psi && (1)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \vee \exists x\psi. && (2)\\
\varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\varphi && (3)\\
\forall x(\varphi \rightarrow \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \rightarrow \forall x\psi && (4)\\
\exists x(\psi \rightarrow \varphi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\psi \rightarrow \varphi. && (5)
\end{aligned}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \rightarrow A$.

Demonstrăm (1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 1.26)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 1.26)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x\psi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (3):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \exists x\varphi[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ (aplicând P.1.26)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (4):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \quad & \iff \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P.1.26)} \\
& \iff \quad \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff \quad \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \\
& \iff \quad \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\psi)[e].
\end{aligned}
$$

Demonstrăm (5):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \exists x(\psi \to \varphi)[e] \quad & \iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\big) \\
& \iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e]\big) \text{ (aplicând P.1.26)} \\
& \iff \quad \big(\text{ există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\big) \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
& \iff \quad \mathcal{A} \not\vDash \forall x\psi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
& \iff \quad \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e].
\end{aligned}
$$

□

(S2.2) Fie φ, ψ formule şi x variabilă. Să se demonstreze:

(i) $\vDash \varphi$ implică $\vDash \forall x\varphi$;

(ii) $\vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem $\vDash \varphi$ şi vrem $\vDash \forall x\varphi$, i.e. pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice evaluare $e : V \to A$, avem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$.
Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Avem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ dacă şi numai dacă pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Dar aceasta este adevărat, având în vedere că $\vDash \varphi$, deci $\mathcal{A} \vDash \varphi[e']$, cu $e' := e_{x\leftarrow a}$.

(ii) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Trebuie să demonstrăm că

$$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi))[e].$$

Presupunem că

$$(*) \quad \mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$$

şi vrem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi))[e]$. Presupunem că

$$(**) \quad \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$$

şi vrem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi))[e]$. Fie $a \in A$. Vrem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$. Din (*) avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$, iar din (**) obţinem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Astfel deducem concluzia dorită.

$\square$

(S2.3) Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Demonstraţie: Aplicăm inducţia pe termeni. Avem următoarele cazuri:

- $t = v \in V$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = e_1(v) = e_2(v) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.
- $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2) = c^{\mathcal{A}}$.
- $t = ft_1 \dots t_m$, cu $f \in \mathcal{F}_m, m \geq 1$ şi $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni. Deoarece $Var(t_i) \subseteq Var(t)$, rezultă că pentru orice $i = 1, \dots, m$, avem $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t_i)$. Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducţie pentru a concluziona că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

$\square$