FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Seminar 3

(S3.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y,z) = d)\\
\varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x,y) \rightarrow \exists z Q(x,z))\\
\varphi_3 &= \exists x\forall y P(x,y) \vee \neg\exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z))\\
\varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x,z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x\exists z Q(z,x))
\end{aligned}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y,z) = d) &\mathrel{\text{⫤⊨}} \forall x(f(x) = c \wedge \exists z\neg(g(y,z) = d)\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}} \forall x\exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(y,z) = d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall y(\forall x P(x,y) \rightarrow \exists z Q(x,z)) &\mathrel{\text{⫤⊨}} \forall y\exists z(\forall x P(x,y) \rightarrow Q(x,z))\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}} \forall y\exists z(\forall u P(u,y) \rightarrow Q(x,z))\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}} \forall y\exists z\exists u(P(u,y) \rightarrow Q(x,z)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists x\forall y P(x,y) \vee \neg\exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z)) &\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists x(\forall y P(x,y) \vee \neg\exists y\forall z(S(y) \rightarrow R(z))\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists x(\forall y P(x,y) \vee \forall y\exists z\neg(S(y) \rightarrow R(z))\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists x(\forall u P(x,u) \vee \forall y\exists z\neg(S(y) \rightarrow R(z))\\
&\mathrel{\text{⫤⊨}} \exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\exists z(\exists x Q(x,z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z,x)) &\;\; \mathrel{\text{⫤}} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (\neg\neg\exists x R(x) \vee \neg\forall x \exists z Q(z,x)) &\;\; \mathrel{\text{⫤}} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (\exists x R(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z,x)) &\;\; \mathrel{\text{⫤}} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow \exists x(R(x) \vee \forall z \neg Q(z,x)) &\;\; \mathrel{\text{⫤}} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow \exists x \forall z(R(x) \vee \neg Q(z,x)) &\;\; \mathrel{\text{⫤}} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow \exists u \forall v(R(u) \vee \neg Q(v,u)) &\;\; \mathrel{\text{⫤}} \\
\forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v,u)))
\end{aligned}
$$

$\square$

(S3.2) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x \exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(x,z) = d))$;

(ii) $\forall y \exists z \exists u(P(u,y) \rightarrow Q(y,z))$;

(iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z(P(x,u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;

(iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v,u)))$.

Demonstraţie:

(i) Avem $\varphi^1 = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x,z) = d)_z(h(x)) = \forall x(f(x) = c \wedge \neg(g(x,h(x)) = d)$, unde h este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

(ii) Avem $\varphi^1 = \forall y \exists u(P(u,y) \rightarrow Q(y,z))_z(p(y)) = \forall y \exists u(P(u,y) \rightarrow Q(y,p(y)))$, unde p este un nou simbol de operaţie unară, şi $\varphi^2 = \forall y(P(u,y) \rightarrow Q(y,p(y)))_u(j(y)) = \forall y(P(j(y),y) \rightarrow Q(y,p(y)))$, unde j este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iii) Avem $\varphi^1 = \forall u \forall y \exists z (P(x,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))_x(m) = \forall u \forall y \exists z (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, şi $\varphi^2 = \forall u \forall y (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(z)))_z(k(u,y)) = \forall u \forall y (P(m,u) \vee \neg(S(y) \to R(k(u,y))))$, unde k este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iv) Avem $\varphi^1 = \forall z \forall x \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u)))_u(n(z,x)) = \forall z \forall x \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(n(z,x)) \vee \neg Q(v, n(z,x))))$, unde n este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

$\square$

(S3.3) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile care au cel puţin un drum de lungime 3;

(iii) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3;

(iv) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă.

Demonstraţie: Folosim notaţiile din curs. Se ia $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E})$. Teoria grafurilor este $Th((IREFL),(SIM))$. Clasa de grafuri care trebuie axiomatizată se notează $\mathcal{K}$.

(i) Adăugăm enunţul

$$\varphi_1 := \forall x \forall y (\neg(x = y) \to \dot{E}(x,y)).$$

Deci, $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL),(SIM),\varphi_1))$.

(ii) Adăugăm enunţul

$$\varphi_2 := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \exists v_4 \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} \neg(v_i = v_j) \wedge \dot{E}(v_1,v_2) \wedge \dot{E}(v_2,v_3) \wedge \dot{E}(v_3,v_4) \right).$$

Deci, $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL),(SIM),\varphi_2))$.

(iii) Adăugăm enunţul

$$\varphi_3 := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} \neg(v_i = v_j) \wedge \dot{E}(v_1,v_2) \wedge \dot{E}(v_2,v_3) \wedge \dot{E}(v_3,v_1) \right).$$

Deci, $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL),(SIM),\varphi_3))$.

(iv) Adăugăm enunţul

$$\varphi_4 := \forall x \exists y \dot{E}(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z (\dot{E}(x,y) \wedge \dot{E}(x,z) \to y = z).$$

Deci, $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL),(SIM),\varphi_4))$.

$\square$

(S3.4) Pentru orice formulă φ, variabile distincte x şi y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ şi y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x \varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists y \varphi_x(y) \quad \text{şi} \quad \forall x \varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y \varphi_x(y).$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ şi $e : V \to A$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \exists y \varphi_x(y)[e] & \iff \text{ există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi_x(y)[e_{y\leftarrow a}] \\
& \iff \text{ există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{y\leftarrow a, x\leftarrow a}] \\
& \qquad \text{conform Lemei 1.44.(ii), deoarece} \\
& \qquad y^{\mathcal{A}}(e_{y\leftarrow a}) = e_{y\leftarrow a}(y) = a \\
& \iff \text{ există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \qquad \text{deoarece } y \notin FV(\varphi) \\
& \iff \mathcal{A} \vDash \exists x \varphi[e].
\end{aligned}$$

Analog pentru a doua aserţiune. $\square$