FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Seminar 3

(S3.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y, z) = d) \\
\varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z)) \\
\varphi_3 &= \exists x \forall y P(x, y) \vee \neg\exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z)) \\
\varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))
\end{aligned}$$

(S3.2) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x \exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))$;

(ii) $\forall y \exists z \exists u(P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$;

(iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z(P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;

(iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$.

(S3.3) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile care au cel puţin un drum de lungime 3;

(iii) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3;

(iv) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă.

(S3.4) Pentru orice formulă φ, variabile distincte x şi y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ şi y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\models} \exists y\varphi_x(y) \quad \text{şi} \quad \forall x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall y\varphi_x(y).$$