FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Seminar 4

(S4.1) Fie φ un enunţ al lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea că pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există o $\mathcal{L}$-structură finită $\mathcal{A}$ de cardinal $\geq m$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi$. Demonstraţi că $\neg\varphi$ are un model infinit.
Demonstraţie: Aplicăm Propoziţia 1.72 pentru $\Gamma = \{\neg\varphi\}$. $\square$

(S4.2) Fie $\mathcal{L}_{Graf}$ limbajul grafurilor. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false:

(i) clasa grafurilor este axiomatizabilă;

(ii) clasa grafurilor este finit axiomatizabilă;

(iii) clasa grafurilor finite este axiomatizabilă;

(iv) clasa grafurilor finite este finit axiomatizabilă;

(v) clasa grafurilor infinite este axiomatizabilă;

(vi) clasa grafurilor infinite este finit axiomatizabilă.

Demonstraţie: (i), (ii) sunt adevărate, conform slide-ului 77 din curs. Clasa grafurilor este axiomatizată de mulţimea finită $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$.

Aplicăm în continuare Propoziţia 1.74. Evident, ipoteza (*) este satisfăcută, deoarece pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există un graf finit cu cel puţin m noduri. Clasa grafurilor finite (resp. infinite) coincide cu clasa modelelor finite (resp. infinite) ale lui Γ.
Aplicând Propoziţia 1.74.(ii), rezultă că (iii) este falsă, deci şi că (iv) este falsă.
Aplicând Propoziţia 1.74.(iii), rezultă că (v) este adevărată şi că (vi) este falsă. $\square$

(S4.3) Fie $\mathcal{K}$ o clasă de $\mathcal{L}$-structuri şi $\mathcal{K}^c$ complementul său în clasa tuturor $\mathcal{L}$-structurilor. Dacă atât $\mathcal{K}$ cât şi $\mathcal{K}^c$ sunt axiomatizabile, atunci amândouă sunt finit axiomatizabile.
Demonstraţie: Fie $\Gamma, \Delta \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Gamma), \mathcal{K}^c = Mod(\Delta)$. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{K}$ nu este finit axiomatizabilă. Demonstrăm folosind Teorema de

compacitate că $\Gamma \cup \Delta$ este satisfiabilă. Fie $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \Delta$ finită. Atunci $\Sigma \subseteq \Gamma_0 \cup \Delta$, unde $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ este finită. Deoarece $\mathcal{K} = Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Gamma_0)$ şi $\mathcal{K} \neq Mod(\Gamma_0)$, există $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \Gamma_0$ şi $\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c$. Prin urmare, cum $\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c$, $\mathcal{A} \vDash \Delta$, deci $\mathcal{A} \vDash \Gamma_0 \cup \Delta$ şi în particular $\mathcal{A} \vDash \Sigma$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că $\Gamma \cup \Delta$ are un model $\mathcal{B}$. Ar rezulta atunci că $\mathcal{B} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c = \emptyset$, contradicţie.
Demonstrăm analog că $\mathcal{K}^c$ este finit axiomatizabilă. $\square$

(S4.4) Pentru orice mulţime Γ de formule, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă;

(ii) pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$;

(iii) există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.

Demonstraţie: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sunt evidente.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie ψ ca în (iii) şi φ o formulă arbitrară. Deoarece $\psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$ este tautologie, rezultă că $\vdash \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$, deci şi că $\Gamma \vdash \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$. Aplicând (iii) şi (MP) de două ori, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$. $\square$