FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Seminar 5

(S5.1) Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model pentru ML_0 şi w o stare în $\mathcal{M}$. Demonstraţi că pentru orice formulă φ,

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi \iff \text{pentru orice } v \in W, Rwv \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.$$

Demonstraţie: Avem că

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi & \iff & \mathcal{M}, w \Vdash \neg\Diamond\neg\varphi \\
& \iff & \mathcal{M}, w \nVdash \Diamond\neg\varphi \\
& \iff & \text{nu există } v \in W \text{ a.î. } (Rwv \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash \neg\varphi) \\
& \iff & \text{pentru orice } v \in W, \text{ nu avem că } (Rwv \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash \neg\varphi) \\
& \iff & \text{pentru orice } v \in W, \ Rwv \text{ este falsă sau } \mathcal{M}, v \nVdash \neg\varphi \\
& \iff & \text{pentru orice } v \in W, \ Rwv \text{ este falsă sau } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi \\
& \iff & \text{pentru orice } v \in W, Rwv \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.
\end{array}$$

□

(S5.2) Considerăm limbajul modal de bază ML_0. Demonstraţi că formula $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ este validă în clasa tuturor cadrelor pentru ML_0.
Demonstraţie: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru arbitrar, w o stare din $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe $\mathcal{F}$. Trebuie să arătăm că

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q).$$

Presupunem că

$$(*) \quad \mathcal{M}, w \Vdash \Box(p \to q).$$

Trebuie să demonstrăm că $\mathcal{M}, w \Vdash \Box p \to \Box q$. Presupunem, în continuare, că

$$(**) \quad \mathcal{M}, w \Vdash \Box p.$$

Rămâne să demonstrăm că $\mathcal{M}, w \Vdash \Box q$. Fie $v \in W$ a.î. Rwv. Aplicând (*) şi (**) obţinem $\mathcal{M}, v \Vdash p \to q$ şi $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Rezultă imediat că $\mathcal{M}, v \Vdash q$. Prin urmare, $\mathcal{M}, w \Vdash \Box q$. □

(S5.3) Fie cadrul $\mathcal{F} = (W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, R)$, unde Rw_iw_j ddacă $j = i + 1$:

$$w_1 \to w_2 \to w_3 \to w_4 \to w_5$$

Alegem o evaluare V astfel încât $V(p) = \{w_2, w_3\}$, $V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ şi $V(r) = \emptyset$.
Considerăm modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$. Demonstraţi că

(i) $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box p$;

(ii) $\mathcal{M}, w_1 \nVdash \Diamond\Box p \to p$;

(iii) $\mathcal{M}, w_2 \Vdash \Diamond(p \wedge \neg r)$;

(iv) $\mathcal{M}, w_1 \Vdash q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)))$;

(v) $\mathcal{M} \Vdash \Box q$.

Demonstraţie:

(i) $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box p \iff$ există $v \in W$ a.î. Rw_1v şi $\mathcal{M}, v \Vdash \Box p$.
Luăm $v := w_2$. Cum Rw_1w_2, rămâne să demonstrăm că $\mathcal{M}, w_2 \Vdash \Box p$.
Avem că

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w_2 \Vdash \Box p &\iff \text{pentru orice } u \in W,\ Rw_2u \text{ implică } \mathcal{M}, u \Vdash p. \\ &\iff \mathcal{M}, w_3 \Vdash p \text{ (deoarece } w_3 \text{ este unicul } u \in W \text{ a.î. } Rw_2u) \\ &\iff w_3 \in V(p), \text{ ceea ce este adevărat.} \end{aligned}$$

(ii) Folosind logica propoziţională clasică, avem că

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box p \to p &\iff \mathcal{M}, w_1 \Vdash \neg\Diamond\Box p \vee p \\ &\iff \mathcal{M}, w_1 \Vdash \neg\Diamond\Box p \text{ sau } \mathcal{M}, w_1 \Vdash p. \end{aligned}$$

Conform (i), $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box p$, deci $\mathcal{M}, w_1 \nVdash \neg\Diamond\Box p$. Deoarece $w_1 \notin V(p)$, rezultă că $\mathcal{M}, w_1 \nVdash p$.
Am demonstrat astfel că $\mathcal{M}, w_1 \nVdash \Diamond\Box p \to p$.

(iii) Avem că

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w_2 \Vdash \Diamond(p \wedge \neg r) & \iff & \text{există } v \in W \text{ a.î. } Rw_2v \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash p \wedge \neg r \\
& \iff & \mathcal{M}, w_3 \Vdash p \wedge \neg r \\
& & \text{deoarece } w_3 \text{ este unicul } v \text{ a.î. } Rw_2v \\
& \iff & \mathcal{M}, w_3 \Vdash p \text{ şi } \mathcal{M}, w_3 \Vdash \neg r \\
& \iff & \mathcal{M}, w_3 \Vdash p \text{ şi } \mathcal{M}, w_3 \not\Vdash r \\
& \iff & w_3 \in V(p) \text{ şi } w_3 \notin V(r), \text{ adevărat} \\
& & \text{conform definiţiei lui } V.
\end{array}$$

(iv) Notăm

$$\varphi := q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q))), \quad \psi := \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)))$$
$$\chi := \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)).$$

Avem că

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w_1 \Vdash \varphi & \iff & \mathcal{M}, w_1 \Vdash q \text{ şi } \mathcal{M}, w_1 \Vdash \psi \\
& \iff & \mathcal{M}, w_1 \Vdash \psi \qquad (\text{deoarece } w_1 \in V(q), \text{ deci } \mathcal{M}, w_1 \Vdash q) \\
& \iff & \text{există } v \in W \text{ a.î. } Rw_1v \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash q \wedge \chi \\
& \iff & \mathcal{M}, w_2 \Vdash q \wedge \chi \\
& & \text{deoarece } w_2 \text{ este unicul } v \in W \text{ a.î. } Rw_1v \\
& \iff & \mathcal{M}, w_2 \Vdash \chi \qquad (\text{deoarece } w_2 \in V(q), \text{ deci } \mathcal{M}, w_2 \Vdash q) \\
& \iff & \text{există } u \in W \text{ a.î. } Rw_2u \text{ şi } \mathcal{M}, u \Vdash q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q) \\
& \iff & \mathcal{M}, w_3 \Vdash q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q) \\
& & \text{deoarece } w_3 \text{ este unicul } u \in W \text{ a.î. } Rw_2u \\
& \iff & \mathcal{M}, w_3 \Vdash \Diamond(q \wedge \Diamond q) \\
& & \text{deoarece } w_3 \in V(q), \text{ deci } \mathcal{M}, w_3 \Vdash q \\
& \iff & \text{există } v' \in W \text{ a.î. } Rw_3v' \text{ şi } \mathcal{M}, v' \Vdash q \wedge \Diamond q \\
& \iff & \mathcal{M}, w_4 \Vdash q \wedge \Diamond q \\
& & \text{deoarece } w_4 \text{ este unicul } v' \in W \text{ a.î. } Rw_3v' \\
& \iff & \mathcal{M}, w_4 \Vdash \Diamond q \qquad (\text{deoarece } w_4 \in V(q), \text{ deci } \mathcal{M}, w_4 \Vdash q) \\
& \iff & \text{există } u' \in W \text{ a.î. } Rw_4u' \text{ şi } \mathcal{M}, u' \Vdash q \\
& \iff & \mathcal{M}, w_5 \Vdash q \\
& & \text{deoarece } w_5 \text{ este unicul } u' \in W \text{ a.î. } Rw_4u' \\
& \iff & w_5 \in V(q), \text{ ceea ce este adevărat.}
\end{array}$$

(v) Fie $w \in W$ arbitrar. Avem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Box q \iff$ pentru orice $v \in W$, Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash q \iff$ pentru orice $v \in W$, Rwv implică $v \in V(q)$, ceea ce este adevărat, deoarece $V(q) = W$.

$\square$

(S5.4) Verificaţi dacă următoarele formule din ML_0 sunt satisfiabile:

(i) $\Diamond p \wedge \Box \neg p$;

(ii) $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$.

Demonstraţie:

(i) Pentru orice model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ şi stare w din $\mathcal{M}$, avem că

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \wedge \Box \neg p \quad & \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \text{ şi } \mathcal{M}, w \Vdash \Box \neg p \\ & \Longleftrightarrow \quad (*) \text{ şi } (**), \end{aligned}$$

unde

(*) există $v \in W$ a.î. Rwv şi $\mathcal{M}, v \Vdash p$,
(**) pentru orice $u \in W$, Rwu implică $\mathcal{M}, u \Vdash \neg p$.

Presupunem că (*) şi (**) sunt satisfăcute. Fie $v \in W$ a.î. Rwv şi $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Aplicând (**) cu $u := v$, rezultă că $\mathcal{M}, v \Vdash \neg p$, deci $\mathcal{M}, v \nVdash p$. Am obţinut o contradicţie. Rezultă că (*) şi (**) nu pot fi adevărate în acelaşi timp, deci $\mathcal{M}, w \nVdash \Diamond p \wedge \Box \neg p$.
Prin urmare, $\Diamond p \wedge \Box \neg p$ nu este satisfiabilă.

(ii) Pentru orice model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ şi stare w din $\mathcal{M}$, avem că

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \wedge \Diamond \neg p \quad \Longleftrightarrow \quad (*) \text{ şi } (**),$$

unde

(*) există $v \in W$ a.î. Rwv şi $\mathcal{M}, v \Vdash p$,
(**) există $u \in W$ a.î. Rwu şi $\mathcal{M}, u \Vdash \neg p$.

Fie $\mathcal{M}_0 = (W_0, R_0, V_0)$, unde

$$W_0 = \{a, b\}, \quad R_0 = \{(a, a), (a, b)\}, \quad V_0(p) = \{a\}.$$

Demonstrăm că

$$\mathcal{M}_0, a \Vdash \Diamond p \wedge \Diamond \neg p.$$

Avem că Raa şi $\mathcal{M}, a \Vdash p$, deci (*) este satisfăcută cu $w := a$.

De asemenea, Rab şi $\mathcal{M}, b \Vdash \neg p$, deoarece $b \notin V(p)$, prin urmare $\mathcal{M}, b \nVdash p$. Aşadar, (**) este satisfăcută cu $w := a$.

Prin urmare, $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$ este satisfiabilă.

$\Box$

(S5.5) Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model pentru ML_0 şi w o stare în $\mathcal{M}$. Demonstraţi că pentru orice $n \geq 1$,

$$
\begin{array}{lll}
(1) \quad \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond^n \varphi & \iff & \text{există } v \in W \text{ a.î. } R^n wv \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi \\
(2) \quad \mathcal{M}, w \Vdash \Box^n \varphi & \iff & \text{pentru orice } v \in W, R^n wv \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.
\end{array}
$$

Demonstraţie: Demonstrăm (1) prin inducţie după n.

$n = 1$: Se aplică Definiţia 2.13.
$n \Rightarrow n+1$: Avem că

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond^{n+1} \varphi & \iff & \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond^n \Diamond \varphi \\
& \iff & \text{există } u \in W \text{ a.î. } R^n wu \text{ şi } \mathcal{M}, u \Vdash \Diamond \varphi \\
& & \text{conform ipotezei de inducţie} \\
& \iff & \text{există } u, v \in W \text{ a.î. } R^n wu,\ Ruv \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi \\
& \iff & \text{există } v \in W \text{ a.î. } R^{n+1} wv \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.
\end{array}
$$

(2) se demonstrează similar.

$\square$