FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Seminar 6

(S6.1) Demonstraţi că pentru orice $p \in PROP$, formula

$$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$$

este validă în clasa tuturor cadrelor.
Demonstraţie: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru, w o stare din $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe $\mathcal{F}$. Avem că

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}, w \Vdash \neg\Box\neg p & \iff & \mathcal{M}, w \not\Vdash \Box\neg p \\
& \iff & \text{nu este adevărat că pentru orice } v \in W, \\
& & Rwv \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash \neg p \\
& \iff & \text{există } v \in W \ \text{ a.î. nu este adevărat că} \\
& & Rwv \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash \neg p \\
& \iff & \text{există } v \in W \ \text{ a.î. nu este adevărat că} \\
& & Rwv \text{ este falsă sau } \mathcal{M}, v \Vdash \neg p \\
& \iff & \text{există } v \in W \text{ a.î. } Rwv \text{ şi } \mathcal{M}, v \not\Vdash \neg p \\
& \iff & \text{există } v \in W \text{ a.î. } Rwv \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash p \\
& \iff & \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p.
\end{array}$$

Prin urmare, $\mathcal{M}, w \Vdash \neg\Box\neg p \leftrightarrow \Diamond p$. $\Box$

(S6.2) Demonstraţi că formula $\Box p \to \Diamond p$ nu este validă în clasa tuturor cadrelor.
Demonstraţie: Fie $\mathcal{F} = (W, R)$, unde $W = \{1, 2\}, R = \{(1, 1), (1, 2)\}$ şi $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model arbitrar bazat pe $\mathcal{F}$.
Avem că

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}, 2 \Vdash \Box p & \iff & \text{pentru orice } n \in W,\ R2n \text{ implică } \mathcal{M}, n \Vdash p, \\
\mathcal{M}, 2 \Vdash \Diamond p & \iff & \text{există } n \in W \ \text{ a.î. } R2n \text{ şi } \mathcal{M}, n \Vdash p.
\end{array}$$

Deoarece nu există $n \in W$ a.î. $R2n$, rezultă că $\mathcal{M}, 2 \Vdash \Box p$, dar $\mathcal{M}, 2 \nVdash \Diamond p$. Prin urmare, $\mathcal{M}, 2 \nVdash \Box p \to \Diamond p$. Rezultă că $\mathcal{F}, 2 \nVdash \Box p \to \Diamond p$, deci $\Box p \to \Diamond p$ nu este validă în $\mathcal{F}$. $\Box$

(S6.3) Fie Λ o logică modală normală. Demonstraţi că pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$ implică $\vdash_\Lambda \Box\varphi \to \Box\psi$;

(ii) $\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$ implică $\vdash_\Lambda \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$.

Demonstraţie: Notăm cu LP logica propoziţională.

(i)

(1)	$\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\vdash_\Lambda \Box(\varphi \to \psi)$	generalizare: (1)
(3)	$\vdash_\Lambda \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	(K)
(4)	$\vdash_\Lambda \Box\varphi \to \Box\psi$	(MP): (4), (2).

(ii)

(1)	$\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\vdash_\Lambda \neg\psi \to \neg\varphi$	P. 2.52: (1) şi tautologia $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
(3)	$\vdash_\Lambda \Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi$	(i): (2)
(4)	$\vdash_\Lambda \neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi$	P. 2.52: (3) şi tautologia $(\sigma_1 \to \sigma_2) \to (\neg\sigma_2 \to \neg\sigma_1)$, unde $\sigma_1 := \Box\neg\psi$, $\sigma_2 := \Box\neg\varphi$
(5)	$\vdash_\Lambda \Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$	(Dual)
(6)	$\vdash_\Lambda \Diamond\psi \leftrightarrow \neg\Box\neg\psi$	(Dual)
(7)	$\vdash_\Lambda \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$	LP: substituţia echivalenţilor ((5),(6)) în (4)

$\Box$

(S6.4) Demonstraţi că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \vee \psi).$$

Demonstraţie: Notăm cu LP logica propoziţională. Folosim notaţiile

$\chi_1 := \Box\varphi \to \Box(\varphi\vee\psi)$, $\chi_2 := \Box\psi \to \Box(\varphi\vee\psi)$ şi $\chi_3 := (\Box\varphi\vee\Box\psi) \to \Box(\varphi\vee\psi)$.

(1)	$\vdash_{\mathbf{K}} \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	tautologie
(2)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_1$	S6.3.(i): (1)
(3)	$\vdash_{\mathbf{K}} \psi \to (\varphi \vee \psi)$	tautologie
(4)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_2$	S6.3.(i): (3)
(5)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_1 \wedge \chi_2$	Propoziţia 2.52: (2), (4) şi faptul că $\chi_1 \wedge \chi_2$ este deductibilă în LP din χ_1, χ_2
(6)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_1 \wedge \chi_2 \to \chi_3$	tautologie: $(\sigma_1 \to \sigma_3) \wedge (\sigma_2 \to \sigma_3) \to (\sigma_1 \vee \sigma_2 \to \sigma_3)$, unde $\sigma_1 := \Box\varphi$, $\sigma_2 := \Box\psi$, $\sigma_3 := \Box(\varphi \vee \psi)$
(7)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_3$	(MP): (5), (6).

$\Box$

(S6.5) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ o mulţime de formule în ML_0. Demonstraţi că

dacă $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ şi $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$.

Demonstraţie: Deoarece $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$, există $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Gamma$ $(n \geq 0)$ a.î.

$$\vdash_\Lambda (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \to \varphi.$$

Deoarece $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \to \psi$, există $\chi_1, \ldots, \chi_p \in \Gamma$ $(p \geq 0)$ a.î.

$$\vdash_\Lambda (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_p) \to (\varphi \to \psi).$$

Avem cazurile:

(i) $n = p = 0$. Atunci $\vdash_\Lambda \varphi$ şi $\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$. Aplicând (MP), rezultă că $\vdash_\Lambda \psi$. Prin urmare, $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$.

(ii) $n \geq 1$ şi $p \geq 1$. Fie $\theta := \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$, $\chi := \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_p$.

Avem

(1)	$\vdash_\Lambda \theta \to \varphi$	ipoteză
(2)	$\vdash_\Lambda \chi \to (\varphi \to \psi)$	ipoteză
(3)	$\vdash_\Lambda \varphi \to (\chi \to \psi)$	P. 2.52: (2) şi tautologia $\big(\chi \to (\varphi \to \psi)\big) \to \big(\varphi \to (\chi \to \psi)\big)$
(4)	$\vdash_\Lambda \theta \to (\chi \to \psi)$	P. 2.52: (1), (3) şi tautologia $(\sigma_1 \to \sigma_2) \wedge (\sigma_2 \to \sigma_3) \to (\sigma_1 \to \sigma_3)$, unde $\sigma_1 := \theta$, $\sigma_2 := \varphi$, $\sigma_1 := \chi \to \psi$
(5)	$\vdash_\Lambda (\theta \wedge \chi) \to \psi$	P. 2.52: (4) şi tautologia $(\theta \to (\chi \to \psi)) \to ((\theta \wedge \chi) \to \psi)$.

Am demonstrat că $\vdash_\Lambda (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_p) \to \psi$. Prin urmare, $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$.

(iii) $n = 0$ şi $p \geq 1$. Se tratează similar.

(iv) $n \geq 1$ şi $p = 0$. Se tratează similar.

$\square$