FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Examen

Nume: ______________________

Prenume: __________________

Grupa: _____________________

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Oficiu	TOTAL
___/3	___/2	___/1,5	___/1,5	___/2	___/2	___/2	1	_____/15

1 Logică de ordinul întâi

(P1) [3 puncte]

(i) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(a) $\forall x(\varphi \land \psi) \vDash \exists x\varphi \land \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.

(b) $\forall x(\varphi \lor \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \lor \forall x\psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(ii) Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

$$\exists x\varphi \land \exists x\psi \nvDash \forall x(\varphi \land \psi).$$

Demonstraţie:

(i) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(a) Obţinem

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \forall x(\varphi \wedge \psi)[e] &\Leftrightarrow \text{ pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \\
&\Leftrightarrow \text{ pentru orice } a \in A,\ (\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \\
&\Leftrightarrow \text{ pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi} \\
&\qquad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\Rightarrow \text{ există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi} \\
&\qquad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].
\end{aligned}$$

(b) Obţinem

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e] &\Leftrightarrow \text{ pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \\
&\Leftrightarrow \text{ pentru orice } a \in A,\ (\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \\
&\Leftrightarrow \text{ pentru orice } a \in A,\ (\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \\
&\qquad \text{conform Propoziţiei 1.26} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \forall x\psi)[e].
\end{aligned}$$

(ii) Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := \neg(x\dot{<}\dot{0})$ şi $\psi := (x\dot{<}\dot{2})$. Obţinem că

- $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \Leftrightarrow$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 0$ şi există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, amândouă adevărate. Prin urmare, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e]$
- $\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \wedge \psi)[e] \Leftrightarrow$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $(\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow n}] \Leftrightarrow$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem ($n \geq 0$ şi $n < 2$), ceea ce nu este adevărat (luăm $n := 3$, de exemplu). Prin urmare, $\mathcal{N} \not\vDash \forall x(\varphi \wedge \psi)[e]$.

□

(P2) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

(i) două simboluri de relaţii unare Q, R şi un simbol de relaţie binară S;

(ii) un simbol de constantă d.

(i) Să se găsească o formă normală prenex pentru următoarea formulă a lui $\mathcal{L}$:

$$\varphi \;=\; \exists x(S(x,d) \wedge S(x,z)) \to (\forall y R(y) \to \neg\forall z\neg Q(z)).$$

(ii) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul

$$\psi \;=\; \exists v_1 \forall v_3 \exists v_2 \forall v_4 \exists v_5 \big((S(v_1, v_2) \to S(v_2, v_5)) \vee R(v_4) \wedge \neg(Q(v_5) \to Q(v_3))\big).$$

Demonstraţie:

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi_2 \;&\text{⫤⊨}\; \forall x \Big(S(x,d) \wedge S(x,z) \to (\forall y R(y) \to \neg \forall z \neg Q(z)) \Big) \\
&\text{⫤⊨}\; \forall x \Big(S(x,d) \wedge S(x,z) \to (\forall y R(y) \to \exists z \neg\neg Q(z)) \Big) \\
&\text{⫤⊨}\; \forall x \Big(S(x,d) \wedge S(x,z) \to \exists y (R(y) \to \exists z \neg\neg Q(z)) \Big) \\
&\text{⫤⊨}\; \forall x \Big(S(x,d) \wedge S(x,z) \to \exists y \exists z (R(y) \to \neg\neg Q(z)) \Big) \\
&\text{⫤⊨}\; \forall x \exists y \Big(S(x,d) \wedge S(x,z) \to \exists z (R(y) \to \neg\neg Q(z)) \Big) \\
&\text{⫤⊨}\; \forall x \exists y \Big(S(x,d) \wedge S(x,z) \to \exists v (R(y) \to \neg\neg Q(v)) \Big) \\
&\text{⫤⊨}\; \forall x \exists y \exists v \Big(S(x,d) \wedge S(x,z) \to (R(y) \to \neg\neg Q(v)) \Big).
\end{aligned}$$

(ii) Obţinem

$$\psi^1 = \forall v_3 \exists v_2 \forall v_4 \exists v_5 \big((S(c, v_2) \to S(v_2, v_5)) \vee R(v_4) \wedge \neg(Q(v_5) \to Q(v_3))\big),$$

unde c este un nou simbol de constantă

$$\psi^2 = \forall v_3 \forall v_4 \exists v_5 \big((S(c, f(v_3)) \to S(f(v_3), v_5)) \vee R(v_4) \wedge \neg(Q(v_5) \to Q(v_3))\big),$$

unde f este un nou simbol de operaţie unară

$$\psi^3 = \forall v_3 \forall v_4 \big((S(c, f(v_3)) \to S(f(v_3), h(v_3, v_4))) \vee R(v_4) \wedge \neg(Q(h(v_3, v_4)) \to Q(v_3))\big),$$

unde h este un nou simbol de operaţie binară.

Cum ψ^3 este enunţ universal, rezultă că ψ^3 este o formă normală Skolem pentru ψ.

□

(P3) [1,5 puncte] Să se dea exemplu de mulţime Γ de $\mathcal{L}_=$-enunţuri ce are proprietatea că pentru orice $\mathcal{L}_=$-structură finită $\mathcal{A}$, avem:

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A} \text{ conţine un număr par de elemente.}$$

Demonstraţie: Considerăm mulţimea de enunţuri

$$\Gamma = \left\{ \bigvee_{k\leq l} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2l} \mid l \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

"$\Leftarrow$" Fie $\mathcal{A} = (A)$ o $\mathcal{L}_=$-structură finită a.î $|A| = 2n$ ($n \geq 1$), deci $\mathcal{A} \vDash \exists^{=2n}$. Trebuie să arătăm că $\mathcal{A} \vDash \Gamma$. Fie $l \in \mathbb{N}^*$ arbitrar. Vom demonstra că

$$\mathcal{A} \vDash \bigvee_{k\leq l} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2l}.$$

Avem următoarele cazuri:

(i) $n < l$. Deoarece $\exists^{=2n} \in \{\exists^{=2k} \mid k \leq l\}$, rezultă că $\vDash \exists^{=2n} \rightarrow \bigvee_{k\leq l} \exists^{=2k}$ şi, evident, $\vDash \bigvee_{k\leq l} \exists^{=2k} \rightarrow \bigvee_{k\leq l} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2l}$.

Deoarece $\mathcal{A} \vDash \exists^{=2n}$, obţinem imediat că $\mathcal{A} \vDash \bigvee_{k\leq l} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2l}$.

(ii) $n \geq l$. Deoarece $2n \geq 2l$, rezultă că $\vDash \exists^{=2n} \rightarrow \exists^{\geq 2l}$ şi, evident, $\vDash \exists^{\geq 2l} \rightarrow \bigvee_{k\leq l} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2l}$. Rezultă că $\mathcal{A} \vDash \bigvee_{k\leq l} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2l}$.

"$\Rightarrow$" Fie $\mathcal{A} = (A)$ o $\mathcal{L}_=$-structură finită a.î. $\mathcal{A} \vDash \Gamma$. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{A}$ conţine un număr impar de elemente, deci că $|A| = 2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) Cum $\mathcal{A} \vDash \Gamma$, în particular (luând $l := n+1$), obţinem

$$\mathcal{A} \vDash \bigvee_{k\leq n+1} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2(n+1)},$$

deci

$$\mathcal{A} \vDash \bigvee_{k\leq n+1} \exists^{=2k} \quad \text{sau} \quad \mathcal{A} \vDash \exists^{\geq 2(n+1)}.$$

Rezultă că fie există $k \leq n+1$ astfel încât $\mathcal{A}$ conţine $2k$ elemente, fie $\mathcal{A}$ conţine cel puţin $2(n+1) = 2n+2$ elemente. Cum ştim că $\mathcal{A}$ conţine $2n+1$ elemente, am ajuns la o contradicţie.

$\square$

(P4) [1,5 puncte] Fie T teoria ordinii parţiale (în limbajul $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$). Să se găsească un $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-enunţ φ astfel încât

$$T \not\models \varphi \text{ şi } T \not\models \neg\varphi.$$

Demonstraţie: O $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structură $\mathcal{A} = (A, \leq)$ este model al lui T ddacă $\mathcal{A}$ este mulţime parţial ordonată. Fie

$$\varphi := \exists v_0 \forall v_1 (v_0 \dot{\leq} v_1).$$

Pentru orice mulţime parţial ordonată $\mathcal{A} = (A, \leq)$, avem că $\mathcal{A} \models \varphi$ ddacă $\mathcal{A}$ admite minim.
Considerăm următoarele două mulţimi parţial ordonate: $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq)$ şi $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \leq)$. Obţinem:

(i) $\mathcal{N}$ are minim, prin urmare $\mathcal{N} \models \varphi$. Rezultă că $\mathcal{N} \not\models \neg\varphi$. Deoarece $\mathcal{N} \models T$, avem că $T \not\models \neg\varphi$.

(ii) $\mathcal{Z}$ nu are minim, prin urmare $\mathcal{Z} \models \neg\varphi$. Rezultă că $\mathcal{Z} \not\models \varphi$. Deoarece $\mathcal{Z} \models T$, avem că $T \not\models \varphi$.

□

2 Logică modală

(P5) [2 puncte] Demonstraţi că următoarele formule nu sunt valide în clasa tuturor cadrelor:

(i) $\Diamond p \to \Box p$;

(ii) $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$.

Demonstraţie:

(i) Trebuie să găsim un model şi o stare din acest model în care formula este falsă. Fie modelul

$$\mathcal{M} = (W, R, V), \text{ unde } W = \{1, 2, 3\},\ R = \{(1, 3), (1, 2)\},\ V(p) = \{2\}.$$

Cum $2 \in V(p)$ şi $R12$, rezultă că $\mathcal{M}, 1 \Vdash \Diamond p$.

Avem că $\mathcal{M}, 1 \Vdash \Box p \Longleftrightarrow$ pentru orice $v \in W$, $R1v$ implică $\mathcal{M}, v \Vdash p$. Observăm că $R13$, dar $\mathcal{M}, 3 \nVdash p$, deoarece $3 \notin V(p)$. Prin uramre $\mathcal{M}, 1 \nVdash \Box p$.

Am demonstrat astfel că $\mathcal{M}, 1 \nVdash \Diamond p \to \Box p$.

(ii) Fie modelul

$$\mathcal{M} = (W, R, V), \text{ unde } W = \{1, 2\},\ R = \{(1, 2)\},\ V(p) = \{2\}.$$

Demonstrăm, în continuare, că $\mathcal{M}, 1 \nVdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$.

Avem că

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, 1 \Vdash \Diamond\Box p \quad & \Longleftrightarrow \quad \text{există } v \in W \text{ a.î. } R1v \text{ şi } \mathcal{M}, v \Vdash \Box p \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}, 2 \Vdash \Box p \text{ (fiindcă 2 este singurul } v \in W \text{ a.î. } R1v).
\end{aligned}$$

Cum 2 este stare finală (adică nu există $u \in W$ a.î. $R2u$), obţinem că $\mathcal{M}, 2 \Vdash \Box p$. Deci,

$$(*) \qquad \mathcal{M}, 1 \Vdash \Diamond\Box p.$$

Avem că

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, 1 \Vdash \Box\Diamond p \quad & \Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } v \in W,\ R1v \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash \Diamond p \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}, 2 \Vdash \Diamond p \text{ (fiindcă 2 este singurul } v \in W \text{ a.î. } R1v).
\end{aligned}$$

Deoarece 2 este stare finală, rezultă că $\mathcal{M}, 2 \nVdash \Diamond p$. Deci,

$$(**) \qquad \mathcal{M}, 1 \nVdash \Box\Diamond p.$$

Din (*) şi (**) rezultă că $\mathcal{M}, 1 \nVdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$.

$\Box$

(P6) [2 puncte]

(i) Demonstraţi următoarea regulă de deducţie derivată în sistemul modal **K**:

$$\{p \to q\} \vdash \Diamond p \to \Diamond q.$$

(ii) Arătaţi că următoarea formulă este **K**-demonstrabilă:

$$\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q).$$

Demonstraţie:

(i) Trebuie să demonstrăm că $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi \rightarrow \psi$ implică implică $\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi$. A se vedea (S6.3).(ii).

(ii) Notăm cu LP logica propoziţională. Folosim notaţiile

$$\chi_1 := \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p,\ \chi_2 := \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q \text{ şi}$$
$$\chi_1 := \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q).$$

Trebuie să demonstrăm că $\vdash_{\mathbf{K}} \chi_3$.

(1)	$\vdash_{\mathbf{K}} (p \wedge q) \rightarrow p$	tautologie
(2)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_1$	(S6.3).(i): (1)
(3)	$\vdash_{\mathbf{K}} (p \wedge q) \rightarrow q$	tautologie
(4)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_2$	(S6.3).(i): (3)
(5)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_1 \wedge \chi_2$	Propoziţia 2.52: (2), (4) şi faptul că $\chi_1 \wedge \chi_2$ este deductibilă în LP din χ_1, χ_2
(6)	$\vdash_{\mathbf{K}} (\chi_1 \wedge \chi_2) \rightarrow \chi_3$	tautologie: $((\sigma_1 \rightarrow \sigma_2) \wedge (\sigma_1 \rightarrow \sigma_3)) \rightarrow (\sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \wedge \sigma_3))$, unde $\sigma_1 := \Box(p \wedge q)$, $\sigma_2 := \Box p$, $\sigma_3 := \Box q$
(7)	$\vdash_{\mathbf{K}} \chi_3$	(MP): (5), (6).

$\Box$

(P7) [2 puncte] Fie Γ o Λ-MCS. Demonstraţi că:

$$\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi \iff \varphi \in \Gamma.$$

Demonstraţie: "$\Leftarrow$" Evident, conform Propoziţiei 2.54.(iii).

"$\Rightarrow$" Avem că $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$. Presupunem prin reducere la absurd că $\varphi \notin \Gamma$. Deoarece Γ este o Λ-MCS şi Γ este o submulţime proprie a lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$, trebuie să avem că $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este Λ-inconsistentă. Aplicând Propoziţia 2.59.(ii), rezultă că $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg\varphi$. Am obţinut astfel atât $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ cât şi $\Gamma \vdash_{\Lambda} \neg\varphi$. Rezultă, din Propoziţia 2.58, că Γ este Λ-inconsistentă, ceea ce este o contradicţie. $\Box$