FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Examen

Nume: ______________________

Prenume: __________________

Grupa: _____________________

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Oficiu	TOTAL
___/3	___/2	___/1,5	___/1,5	___/2	___/2	___/2	1	_____/15

1 Logică de ordinul întâi

(P1) [3 puncte]

(i) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(a) $\forall x(\varphi \land \psi) \vDash \exists x\varphi \land \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.

(b) $\forall x(\varphi \lor \psi) \mathrel{=\!\!\mid\!\!\vDash} \varphi \lor \forall x\psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(ii) Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

$$\exists x\varphi \land \exists x\psi \nvDash \forall x(\varphi \land \psi).$$

(P2) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

(i) două simboluri de relaţii unare Q, R şi un simbol de relaţie binară S;

(ii) un simbol de constantă d.

(i) Să se găsească o formă normală prenex pentru următoarea formulă a lui $\mathcal{L}$:

$$\varphi = \exists x(S(x,d) \land S(x,z)) \rightarrow (\forall y R(y) \rightarrow \neg \forall z \neg Q(z)).$$

(ii) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul

$$\psi = \exists v_1 \forall v_3 \exists v_2 \forall v_4 \exists v_5 \big((S(v_1,v_2) \rightarrow S(v_2,v_5)) \lor R(v_4) \land \neg(Q(v_5) \rightarrow Q(v_3))\big).$$

(P3) [1,5 puncte] Să se dea exemplu de mulţime Γ de $\mathcal{L}_=$-enunţuri ce are proprietatea că pentru orice $\mathcal{L}_=$-structură finită $\mathcal{A}$, avem:

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A} \text{ conţine un număr par de elemente.}$$

(P4) [1,5 puncte] Fie T teoria ordinii parţiale (în limbajul $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$). Să se găsească un $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-enunţ φ astfel încât

$$T \not\vDash \varphi \text{ şi } T \not\vDash \neg\varphi.$$

2 Logică modală

(P5) [2 puncte] Demonstraţi că următoarele formule nu sunt valide în clasa tuturor cadrelor:

(i) $\Diamond p \rightarrow \Box p$;

(ii) $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$.

(P6) [2 puncte]

(i) Demonstraţi următoarea regulă de deducţie derivată în sistemul modal **K**:

$$\{p \rightarrow q\} \vdash \Diamond p \rightarrow \Diamond q.$$

(ii) Arătaţi că următoarea formulă este **K**-demonstrabilă:

$$\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q).$$

(P7) [2 puncte] Fie Γ o Λ-MCS. Demonstraţi că:

$$\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \iff \varphi \in \Gamma.$$