

Logică Matematică

Anul I, Semestrul II 2022

Laurențiu Leuștean

Pagina web: <https://cs.unibuc.ro/~lleustean/Teaching/2022-LOGICMATH/index.html>

1

Preliminarii

2

Operații cu mulțimi

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$A \cup B = \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

$$A - B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

$$C_T A = T - A = \{x \in T \mid x \notin A\}$$

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; \mathbb{Z} este mulțimea numerelor întregi; \mathbb{R} este mulțimea numerelor reale; \mathbb{Q} este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar, $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

Exemplu. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
 $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

3

Produsul cartezian

Notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b (care sunt **componentele** lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$;
 $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale dacă $a = c$ și $b = d$.

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

4

Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție.

Spunem că f este **definită pe A cu valori în B** , A se numește **domeniul de definiție** al funcției f și B se numește **domeniul valorilor** lui f sau **codomeniul** lui f .

Notație: Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $Fun(A, B)$, B^A sau $(A \rightarrow B)$.

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție, $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- ▶ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este **imaginea directă** a lui X prin f ; $f(A)$ este **imaginea** lui f .
- ▶ $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este **imaginea inversă** a lui Y prin f .
- ▶ Fie $f|_X : X \rightarrow B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este **restricția** lui f la X .

5

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție.

- ▶ f este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- ▶ f este **surjectivă** dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- ▶ f este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.

6

Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții. **Compunerea** lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcția identică a lui A este $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$.

O funcție $f : A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă există $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Funcția g este unică, se numește **inversa** lui f și se notează f^{-1} .

O funcție este bijectivă ddacă este inversabilă.

Fie $f : A \rightarrow A$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim $f^n : A \rightarrow A$ astfel:

$$f^0 = 1_A, \quad f^{n+1} = f^n \circ f \text{ pentru } n \geq 0.$$

7

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. **Funcția caracteristică** a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăți

Dacă $A, B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{C \setminus A}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Observație

Funcția caracteristică se poate folosi pentru a arăta că două mulțimi sunt egale: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.

8

Relații binare

Definiție

O **relație binară** între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

O relație binară pe A este o submulțime a lui $A \times A$.

Exemple

- ▶ $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$| = \{(k, n) \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$$

- ▶ $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$< = \{(k, n) \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$$

9

Operații cu relații

Fie A, B, C mulțimi.

Definiție

- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci **relația inversă** $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$, atunci **compunerea** lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:
 $Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}.$
- ▶ **Diagonala** lui A este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}.$

Exercițiu

- ▶ Compunerea relațiilor este asociativă.
- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.

10

Relații binare

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A \times A$ o relație binară pe A .

Notăție: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiție

- ▶ R este **reflexivă** dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **ireflexivă** dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **simetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx .
- ▶ R este **antisimetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$,
 xRy și yRx implică $x = y$.
- ▶ R este **tranzitivă** dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
 xRy și yRz implică xRz .
- ▶ R este **totală** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx .

11

Relații de echivalență

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A se numește **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Notății: Vom nota relațiile de echivalență cu \sim . Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulțime nevidă și \sim o relație de echivalență pe A .

Definiție

Pentru orice $x \in A$, **clasa de echivalență** $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}.$

12

Proprietăți

- ▶ $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- ▶ $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- ▶ $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numește **mulțimea cât** a lui A prin \sim și se notează A/\sim . Aplicația $\pi : A \rightarrow A/\sim$, $\pi(x) = [x]$ se numește **funcția cât**.

13

Definiție

- Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A este relație de
- ▶ **ordine parțială** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
 - ▶ **ordine strictă** dacă este ireflexivă și tranzitivă.
 - ▶ **ordine totală** dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu \leq , iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

Definiție

Dacă \leq este o relație de ordine parțială (totală) pe A , spunem că (A, \leq) este **mulțime parțial (total) ordonată**.

14

Fie (A, \leq) o mulțime parțial ordonată.

Proprietăți

- ▶ Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- ▶ Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- ▶ Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci (S, \leq) este mulțime parțial ordonată.

Dem.: Exercițiu.

15

Fie (A, \leq) o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in S$ se numește

- ▶ **element minimal** al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- ▶ **element maximal** al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $e \leq a$ implică $a = e$;
- ▶ **cel mai mic element** (sau **minim**) al lui S , notat $\min S$, dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **cel mai mare element** (sau **maxim**) al lui S , notat $\max S$, dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$.

16

Proprietăți

- ▶ Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- ▶ Dacă $\min S$ există, atunci $\min S$ este element minimal al lui S .
- ▶ Dacă $\max S$ există, atunci $\max S$ este element maximal al lui S .
- ▶ S poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.
- ▶ Un element minimal (maximal) al lui S nu este în general minim (maxim) al lui S .

Dem.: Exercițiu.

17

Fie (A, \leq) o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in A$ se numește

- ▶ **majorant** al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **minorant** al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **supremum** al lui S , notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S ;
- ▶ **infimum** al lui S , notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S .

Proprietăți

- ▶ Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui S pot fi vide.
- ▶ Atât supremumul, cât și infimumul lui S sunt unice (dacă există).

18

Fie (A, \leq) o mulțime parțial ordonată.

Definiție

Spunem că (A, \leq) este mulțime **bine ordonată** dacă orice submulțime nevidă a lui A are minim. În acest caz, \leq se numește relație de **bună ordonare** pe A .

Exemple

(\mathbb{N}, \leq) este bine ordonată, dar (\mathbb{Z}, \leq) nu este bine ordonată.

Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.

19

Fie (A, \leq) o mulțime parțial ordonată.

Definiție

(A, \leq) se numește **inductiv ordonată** dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.

Lema lui Zorn

Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.

- un instrument foarte util în demonstrații.

20

Familii

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O **familie** de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \rightarrow A$. Notăm cu $(a_i)_{i \in I}$ familia $f : I \rightarrow A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i , obținem o **familie (indexată) de mulțimi** $(A_i)_{i \in I}$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T . Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i \in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

Dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i, j \in I, i \neq j$, spunem că $\bigcup_{i \in I} A_i$ este o **reuniune disjunctă**.

21

Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}. \end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$, $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ se numește **proiecție canonică** a lui $\prod_{i \in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j \quad \text{și} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j.$$

22

$$I = \{1, \dots, n\}$$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ și $A_1, \dots, A_n \subseteq T$.

▶ $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$, un **n -tuplu (ordonat)**

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{și} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$\bigprod_{i \in I} A_i = \bigprod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n \quad \text{și} \quad A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$$

Definiție

O **relație n -ară** între A_1, \dots, A_n este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^n A_i$.

O relație n -ară pe A este o submulțime a lui A^n . Dacă R este relație n -ară, spunem că n este **aritatea** lui R .

23

Axioma alegerii

Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice) (AC)

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

▶ formulată de **Zermelo** (1904)

▶ a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcția alegere f_C .

Reformulare

Următoarea afirmație este echivalentă cu Axioma alegerii:

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este o mulțime nevidă.

24

Axioma alegerii

- ▶ Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- ▶ Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- ▶ **Lema lui Zorn**
- ▶ **Principiul bunei ordonări:** Orice mulțime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relație binară \leq pe X a.î. (X, \leq) este mulțime bine ordonată).

H. Rubin, J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, Elsevier, 1985

25

Echipotență

Definiția 1.1

Spunem că A este **echipotentă** cu B dacă există o bijecție $f : A \rightarrow B$. **Notăție:** $A \sim B$.

Propoziția 1.2

Pentru orice mulțimi A, B, C au loc:

- (i) $A \sim A$;
- (ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.
- (iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B dacă B este echipotentă cu A . De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

26

Mulțimi finite, numărabile

Definiția 1.3

O mulțime A se numește **finită** dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{0, 1, \dots, n-1\}$. În acest caz, notăm cu $|A|$ numărul elementelor lui A .

O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.

Definiția 1.4

O mulțime A este **numărabilă** dacă este echipotentă cu \mathbb{N} .

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

Exemple

- ▶ \mathbb{Z} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și \mathbb{Q} sunt numărabile.
- ▶ Orice submulțime infinită a lui \mathbb{N} este numărabilă.

Teoremă Cantor

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este mulțime numărabilă.

27

Cardinale

28

Numerele **cardinale** sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Definiția 2.1

Pentru orice mulțime A , **cardinalul** lui A (sau **numărul cardinal** al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- ▶ $|A|$ este unic determinat de A .
- ▶ pentru orice mulțimi A, B , avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A .

Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A .

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A , $|A|$ este tot o mulțime.

Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci **clasă**. Vom nota cu **Card** clasa tuturor cardinalelor.

Notăm cardinalele cu $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \dots$

Definiția 2.2

α este **cardinal** ddacă există o mulțime A a.î. $\alpha = |A|$. Spunem, în acest caz, că A este un **reprezentant** al lui α .

Desigur, orice mulțime echipotentă cu A este, de asemenea, reprezentant al lui α .

Definiția 2.3

Fie $\alpha = |A|$ un cardinal. Dacă A este finită (respectiv infinită), spunem că α este un **cardinal finit** (respectiv **cardinal infinit**).

Notații

- ▶ Notăm $0 := |\emptyset|$ și, pentru orice $n \geq 1$, $n := |\{0, 1, \dots, n - 1\}|$.
- ▶ $|\mathbb{N}|$ se notează \aleph_0 (se citește *alef zero*).
- ▶ $|\mathbb{R}|$ se notează \mathfrak{c} și se mai numește și **puterea continuumului**.

Observația 2.4

- (i) O mulțime A este finită ddacă există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n = |A|$. Prin urmare, putem identifica cardinalul $|A|$ cu numărul elementelor lui A .
- (ii) O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.

Observația 2.5

- (i) Pentru orice mulțime A , $\text{Fun}(\emptyset, A)$ are un singur element, **funcția vidă**. Prin urmare, $|\text{Fun}(\emptyset, A)| = 1$.
- (ii) Pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Fun}(A, \emptyset) = \emptyset$, deci $|\text{Fun}(A, \emptyset)| = 0$.

Definiția 2.6

Definim următoarea relație: pentru orice cardinale $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$,

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } f : A \rightarrow B.$$

Observația 2.7

Definiția relației \leq nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Demonstrăm că

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } g : A' \rightarrow B'.$$

\Rightarrow Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție injectivă. Atunci

$g := v \circ f \circ u^{-1} : A' \rightarrow B'$ este injectivă.

\Leftarrow Avem că $f := v^{-1} \circ g \circ u : A \rightarrow B$ este injectivă.

Deci, definiția nu depinde de reprezentanții A și B . □

Relației \leq se asociază o nouă relație, definită astfel:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \leq \beta \text{ și } \alpha \neq \beta.$$

Propoziția 2.8

- (i) Pentru orice mulțimi A, B , dacă $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$.
- (ii) Pentru orice cardinal finit α , avem că $\alpha < \aleph_0$.
- (iii) Pentru orice mulțime A și orice cardinal α , dacă $\alpha \leq |A|$, atunci există o submulțime B a lui A a.î. $|B| = \alpha$.
- (iv) $0 \leq \alpha$ pentru orice cardinal α .
- (v) $1 \leq \alpha$ pentru orice cardinal $\alpha \neq 0$.
- (vi) Relația \leq este reflexivă și tranzitivă.

Dem.: Exercițiu.

Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 2.9 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Dem.: (Schiță). Pentru orice $n \geq 0$, definim

$$h_n := (g \circ f)^n : A \rightarrow A, \quad A_n := h_n(A) \subseteq A, \quad B_n := h_n(g(B)) \subseteq A.$$

Evident, $h_0 = 1_A$, $A_0 = A$ și $B_0 = g(B)$. De asemenea, h_n este injectivă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $h_m \circ h_n = h_{m+n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

Afirmația 1: Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$. Prin urmare, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri descrescătoare de mulțimi a.î. $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \bigcap_{n \geq 0} B_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Introducem următoarele notații:

$$C := \bigcap_{n \geq 0} A_n \quad \text{și, pentru orice } n \in \mathbb{N}, \quad A'_n := A_n - B_n, \quad B'_n := B_n - A_{n+1}.$$

Deoarece h_n, g sunt injective, avem că

$$\begin{aligned} A'_n &= A_n - B_n = h_n(A) - h_n(g(B)) = h_n(A - g(B)), \\ B'_n &= B_n - A_{n+1} = h_n(g(B)) - h_{n+1}(A) \\ &= (h_n \circ g)(B) - (h_n \circ g)(f(A)) = (h_n \circ g)(B - f(A)) \end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Se observă ușor că mulțimile $C, \bigcup_{n \geq 0} A'_n$ și $\bigcup_{n \geq 0} B'_n$ sunt disjuncte două câte două.

Afirmația 2: $A = C \cup \bigcup_{n \geq 0} A'_n \cup \bigcup_{n \geq 0} B'_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Definim

$$\Phi : A \rightarrow B, \quad \Phi(a) = \begin{cases} f(a) & \text{dacă } a \in C \cup \bigcup_{n \geq 0} A'_n \\ b & \text{dacă } a \in \bigcup_{n \geq 0} B'_n \text{ și } b \text{ este unicul element} \\ & \text{din } B \text{ a.î. } g(b) = a. \end{cases}$$

Observăm că Φ e bine definită pe a doua ramură: deoarece

$$\bigcup_{n \geq 0} B'_n \subseteq \bigcup_{n \geq 0} B_n = B_0 = g(B),$$

avem, în acest caz, $a \in g(B)$. Din injectivitatea funcției g , rezultă că există un unic $b \in B$ a.î. $g(b) = a$.

Afirmația 3: Φ este bijectivă.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Prin urmare, $A \sim B$. □

37

O reformulare a Teoremei Cantor-Schröder-Bernstein este

Teorema 2.10

Relația \leq este antisimetrică, adică pentru orice cardinale α, β avem:

$$\alpha \leq \beta \text{ și } \beta \leq \alpha \text{ implică } \alpha = \beta.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Atunci

- ▶ $\alpha \leq \beta$ ddacă există o funcție injectivă $f : A \rightarrow B$.
- ▶ $\beta \leq \alpha$ ddacă există o funcție injectivă $g : B \rightarrow A$.
- ▶ $\alpha = \beta$ ddacă $A \sim B$. □

38

Teorema 2.11

Relația \leq este totală, adică pentru orice cardinale α, β avem că $\alpha \leq \beta$ sau $\beta \leq \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A \text{ și } f : X \rightarrow B \text{ este funcție injectivă}\}.$$

Evident, \mathcal{F} este nevidă. Definim relația \leq pe \mathcal{F} astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că (\mathcal{F}, \leq) este o mulțime parțial ordonată.

39

Afirmația 1: (\mathcal{F}, \leq) este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că \mathcal{F} are un element maximal (Y, g) . Deoarece $Y \subseteq A$ și $g : Y \rightarrow B$ este injectivă, avem că $|Y| \leq \alpha$ și $|Y| \leq \beta$. Distingem următoarele două cazuri:

- ▶ g este surjectivă. Atunci g este bijectivă, deci $|Y| = |B|$. Obținem că $\beta = |B| = |Y| \leq \alpha$.
- ▶ g nu este surjectivă. Atunci există $b \in B - g(Y)$. Dacă $Y \neq A$, luăm $a \in A - Y$ și definim funcția $f : Y \cup \{a\} \rightarrow B$ astfel:

$$f|_Y = g \text{ și } f(a) = b.$$

Se observă ușor că $(Y \cup \{a\}, f) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup \{a\}, f)$, ceea ce este o contradicție cu faptul că (Y, g) este element maximal al lui \mathcal{F} . Prin urmare, trebuie să avem $Y = A$.

Rezultă atunci că $\alpha = |A| = |Y| \leq \beta$. □

40

Teorema 2.12

Relația \leq este o relație de ordine totală.

Dem.: Exercițiu.

Rezultă ușor că

Corolar 2.13

Relația $<$ este o relație de ordine strictă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.14

Pentru orice mulțime infinită A , $\aleph_0 \leq |A|$. Prin urmare, orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.

Dem.: Definim inductiv șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din A cu proprietatea că $a_i \neq a_j$ pentru orice $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$.

Deoarece A este nevidă, există $a_0 \in A$.

Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci există $a_1 \in A$ a.î. $a_1 \neq a_0$.

Cum A este infinită, $A - \{a_0, a_1\}$ este nevidă, deci există $a_2 \in A$ a.î. $a_2 \neq a_0$ și $a_2 \neq a_1$.

În general, presupunem că am definit $a_0, \dots, a_n \in A$ distincte două câte două. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \dots, a_n\}$ este nevidă, deci există $a_{n+1} \in A$ diferit de toți a_0, \dots, a_n .

Definind funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ prin $f(n) = a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că f este injectivă. Prin urmare, $\aleph_0 \leq |A|$.

Deoarece f este injectivă, avem că $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$. Rezultă că $f(\mathbb{N})$ este o submulțime numărabilă a lui A . □

Propoziția 2.15

Fie α un cardinal finit și β un cardinal infinit. Atunci $\alpha < \beta$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.16

Fie A o mulțime infinită și $F \subseteq A$ o submulțime finită a sa. Atunci $|A - F| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.17

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale, reprezentanții A și B fiind aleși a.î. $A \cap B = \emptyset$. Definim **suma cardinalelor** α și β prin

$$\alpha + \beta := |A \cup B|.$$

Observația 2.18

Observăm mai întâi că pentru orice cardinale α, β putem alege mulțimi U, V cu $|U| = \alpha$, $|V| = \beta$ și $U \cap V = \emptyset$. Într-adevăr, dacă $\alpha = |U|$ și $\beta = |V|$, atunci luăm $A = U \times \{1\}$ și $B = V \times \{2\}$.

Observația 2.19

Definiția operației $+$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$ cu $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim

$$f : A \cup B \rightarrow A' \cup B', \quad f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in A \\ v(x) & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare, $\alpha + \beta = |A \cup B| = |A' \cup B'|$. □

Propoziția 2.20

- (i) 0 este element neutru al lui $+$.
- (ii) Operația $+$ este comutativă și asociativă.
- (iii) Pentru orice cardinale α, β, γ ,
 $\beta \leq \gamma$ implică $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$.

În particular, $\alpha \leq \alpha + \gamma$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.21

Pentru orice cardinal infinit α , avem $\alpha + \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid \emptyset \neq X \subseteq A \text{ și } f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X \text{ este funcție bijectivă}\}$.

Afirmația 1: \mathcal{F} este nevidă.

Dem.: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a lui A . Definim

$$f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X, \quad f(x_n, 0) = x_{2n}, \quad f(x_n, 1) = x_{2n+1}.$$

Se observă ușor că f este bijecție. Prin urmare, $(X, f) \in \mathcal{F}$. ■

Definim relația \leq pe \mathcal{F} astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1 \times \{0,1\}} = f_1.$$

Se observă ușor că (\mathcal{F}, \leq) este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: (\mathcal{F}, \leq) este inductiv ordonată.

Demonstrație: Fie $\mathcal{G} = (X_i, f_i)_{i \in I}$ o submulțime total ordonată a lui \mathcal{F} . Fie $X := \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq A$. Definim $f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X$ astfel:

$$\text{dacă } x \in X, \text{ alegem un } i \in I \text{ a.î. } x \in X_i \text{ și definim} \\ f(x, t) = f_i(x, t) \text{ pentru orice } t \in \{0, 1\}.$$

Definiția lui f este corectă, deoarece pentru orice $i, j \in I, i \neq j$, dacă $x \in X_i \cap X_j$, atunci $f_i(x, t) = f_j(x, t)$. De asemenea, se observă ușor că $(X_i, f_i) \leq (X, f)$ pentru orice $i \in I$.

Rămâne să mai arătăm că f este bijectivă.

Suma cardinalelor

Demonstrăm că f este surjectivă. Fie $y \in X$ arbitrar. Atunci există $i \in I$ a.î. $y \in X_i$. Deoarece f_i este surjectivă, există $x \in X_i$, $t \in \{0, 1\}$ a.î. $f_i(x, t) = y$. Conform definiției lui f , rezultă că $f(x, t) = f_i(x, t) = y$.

Demonstrăm că f este injectivă. Fie $x, y \in X, s, t \in \{0, 1\}$ a.î. $f(x, s) = f(y, t)$. Atunci există $i, j \in I$ a.î. $x \in X_i$ și $y \in X_j$. Rezultă că $f(x, s) = f_i(x, s)$ și $f(y, t) = f_j(y, t)$, deci $f_i(x, s) = f_j(y, t)$. Deoarece \mathcal{G} este total ordonată, avem următoarele două posibilități:

- ▶ $(X_i, f_i) \leq (X_j, f_j)$. Atunci $x \in X_i \subseteq X_j$ și $f_j|_{X_i \times \{0,1\}} = f_i$, deci $f_j(x, s) = f_i(x, s)$. Obținem că $f_j(x, s) = f_j(y, t)$. Deoarece f_j este injectivă, rezultă că $x = y$ și $s = t$.
- ▶ $(X_j, f_j) \leq (X_i, f_i)$. Se demonstrează similar că $x = y$ și $s = t$.

49

Suma cardinalelor

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că \mathcal{F} are un element maximal (Y, g) . Așadar, $\emptyset \neq Y \subseteq A$ și $g : Y \times \{0, 1\} \rightarrow Y$ este bijecție, deci $|Y \times \{0, 1\}| = |Y|$.

Afirmația 3: $A - Y$ este finită.

Demonstrație: Presupunem că $A - Y$ este infinită. Din Propoziția 2.14, rezultă că $A - Y$ are o submulțime numărabilă C . Obținem, ca în demonstrația Afirmației 1, o bijecție $h : C \times \{0, 1\} \rightarrow C$. Definim

$$p : (Y \cup C) \times \{0, 1\} \rightarrow Y \cup C, \quad p(x, t) = \begin{cases} g(x, t) & \text{dacă } x \in Y \\ h(x, t) & \text{dacă } x \in C. \end{cases}$$

Deoarece g și h sunt bijecții, se arată ușor că p este, de asemenea, bijecție. Rezultă că $(Y \cup C, p) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup C, p)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui (Y, g) . Prin urmare, $A - Y$ este finită. ■

50

Suma cardinalelor

Aplicând Propoziția 2.16, avem că $|Y| = |A - (A - Y)| = |A| = \alpha$. Obținem

$$\begin{aligned} \alpha &= |Y| = |Y \times \{0, 1\}| = |(Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})| \\ &= |Y \times \{0\}| + |Y \times \{1\}| = |Y| + |Y| = \alpha + \alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Propoziția 2.22

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha + \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.23

Fie α, β cardinale a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Exercițiu.

51

Produsul cardinalelor

Definiția 2.24

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim **produsul cardinalelor** α și β prin

$$\alpha \cdot \beta := |A \times B|.$$

Observația 2.25

Definiția operației \cdot nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim

$$f : A \times B \rightarrow A' \times B', \quad f(a, b) = (u(a), v(b)).$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare, $\alpha \cdot \beta = |A \times B| = |A' \times B'|$. ■

52

Propoziția 2.26

- (i) $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$ pentru orice cardinal α .
- (ii) 1 este element neutru al lui \cdot .
- (iii) Pentru orice cardinale α, β, γ ,

$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma.$$
- (iv) Pentru orice cardinale α, β a.î. $\beta \neq 0, \alpha \leq \alpha \cdot \beta$.
- (v) Operația \cdot este comutativă, asociativă și distributivă față de $+$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.27

Pentru orice cardinal infinit α , avem $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A, X \text{ infinită și } f : X \rightarrow X \times X \text{ este funcție bijectivă}\}.$

Afirmația 1: \mathcal{F} este nevidă.

Demonstrație: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $B \subseteq A$. Prin urmare, există o bijecție $g : B \rightarrow \mathbb{N}$. Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, există o bijecție $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Definim

$$h : B \times B \rightarrow B, \quad h(x, y) = (g^{-1} \circ f)(g(x), g(y)).$$

Se arată ușor că h este bijecție. Rezultă că $(B, h^{-1}) \in \mathcal{F}$. ■

Definim relația \leq pe \mathcal{F} astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că (\mathcal{F}, \leq) este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: (\mathcal{F}, \leq) este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că \mathcal{F} are un element maximal (Y, g) . Fie $\beta := |Y|$. Cum Y este o submulțime infinită a lui A , avem că β este un cardinal infinit și $\beta \leq \alpha$. Deoarece $g : Y \rightarrow Y \times Y$ este bijecție, avem că

$$(*) \quad \beta = |Y| = |Y \times Y| = |Y| \cdot |Y| = \beta \cdot \beta.$$

Afirmația 3: $\beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Aplicăm acum (*) pentru a concludă că $\alpha \cdot \alpha = \alpha$. □

Definim inductiv α^n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ astfel:

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha.$$

Propoziția 2.28

Pentru orice cardinal infinit α și orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^n = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.29

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $0 \neq \beta \leq \alpha$, atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.30

Fie α, β cardinale nenule a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Presupunem că α este infinit. Deoarece \leq este totală, avem următoarele două cazuri:

- ▶ $\beta \leq \alpha$. Atunci $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ și $\alpha \cdot \beta = \alpha$, conform Propoziției 2.29.
- ▶ $\alpha \leq \beta$. Atunci β este, de asemenea, infinit, $\max\{\alpha, \beta\} = \beta$ și $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = \beta$, conform Propoziției 2.29. □

Definiția 2.31

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim

$$\alpha^\beta := |A^B| = |\text{Fun}(B, A)|.$$

Observația 2.32

Definiția lui α^β nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim $\Phi : \text{Fun}(B, A) \rightarrow \text{Fun}(B', A')$ astfel:

pentru orice funcție $f : B \rightarrow A$, $\Phi(f) := u \circ f \circ v^{-1} : B' \rightarrow A'$.
Se demonstrează ușor că Φ este inversabilă, inversa sa fiind

$$\Psi : \text{Fun}(B', A') \rightarrow \text{Fun}(B, A), \quad \Psi(g) = u^{-1} \circ g \circ v$$

Prin urmare, $\alpha^\beta = |\text{Fun}(B, A)| = |\text{Fun}(B', A')|$. □

Observația 2.33

- (i) Pentru orice cardinal α , $1^\alpha = 1, \alpha^0 = 1$.
- (ii) Pentru orice cardinal nenul α , $0^\alpha = 0$.

Dem.: Exercițiu.

Lema 2.34

Fie A, B, C mulțimi. Atunci

- (i) $\text{Fun}(A, \text{Fun}(B, C)) \sim \text{Fun}(A \times B, C)$.
- (ii) $\text{Fun}(A, B \times C) \sim \text{Fun}(A, B) \times \text{Fun}(A, C)$.
- (iii) Dacă în plus $A \cap B = \emptyset$, atunci $\text{Fun}(A \cup B, C) \sim \text{Fun}(A, C) \times \text{Fun}(B, C)$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.35

Fie α, β, γ cardinale arbitrare.

- (i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$, $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$ și $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.
- (ii) Dacă $\alpha \leq \beta$, atunci $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.36

Fie α un cardinal infinit și β un cardinal a.î. $2 \leq \beta \leq 2^\alpha$. Atunci $\beta^\alpha = 2^\alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.37

Fie α un cardinal.

- (i) Pentru orice reprezentant A al lui α , are loc $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.
- (ii) $\alpha < 2^\alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$.

(i) Avem că $2^\alpha = |\text{Fun}(A, \{0, 1\})|$. Definim

$$\Psi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \text{Fun}(A, \{0, 1\}), \quad \Psi(B) = \chi_B,$$

unde χ_B este funcția caracteristică a submulțimii B a lui A .
Se demonstrează ușor că Ψ este bijectivă.

(ii) Deoarece funcția $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $f(a) = \{a\}$ este injectivă, avem că $\alpha \leq 2^\alpha$. Conform (S1.1), nu există funcții surjective cu domeniul A și codomeniul $\mathcal{P}(A)$. Rezultă că $\alpha \neq 2^\alpha$. Prin urmare, $\alpha < 2^\alpha$. □

Propoziția 2.38

Fie α un număr cardinal și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi a.î. $|A_i| \leq \alpha$ pentru orice $i \in I$. Atunci

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \alpha \cdot |I|.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Pentru orice $i \in I$, deoarece $|A_i| \leq \alpha$, există o funcție injectivă $f_i : A_i \rightarrow A$.

Definim $f : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow A \times I$ astfel:

$$\text{dacă } a \in \bigcup_{i \in I} A_i, \text{ alegem } i_a \in I \text{ cu } a \in A_{i_a} \text{ și definim } f(a) = (f_{i_a}(a), i_a).$$

Rezultă ușor că f este injectivă: dacă $a, b \in \bigcup_{i \in I} A_i$ sunt a.î. $(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ și $f_{i_a}(a) = f_{i_b}(b)$. Rezultă că $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă. Prin urmare, $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq |A \times I| = \alpha \cdot |I|$. □

Propoziția 2.39

Fie $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ două cardinale nenule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\alpha \leq \beta$.
- (ii) Există o funcție surjectivă $g : B \rightarrow A$.

Dem.: (i) \Rightarrow (ii) Fie $f : A \rightarrow B$ injectivă. Fixăm $a_0 \in A$. Definim

$$g : B \rightarrow A, \quad g(b) = \begin{cases} a_0 & \text{dacă } b \in B - f(A) \\ a & \text{dacă } b \in f(A) \text{ și } a \text{ este unicul element} \\ & \text{din } A \text{ a.î. } f(a) = b. \end{cases}$$

Deoarece f este injectivă, g este bine definită. De asemenea, se observă imediat că g este surjectivă.

(ii) \Rightarrow (i) Fie $g : B \rightarrow A$ surjectivă. Pentru fiecare $a \in A$, alegem un element $b_a \in B$ a.î. $g(b_a) = a$. Definim

$$f : A \rightarrow B, \quad f(a) = b_a.$$

Se arată ușor că f este injectivă: dacă $a_1, a_2 \in A$ a.î. $b_{a_1} = b_{a_2}$, atunci $a_1 = g(b_{a_1}) = g(b_{a_2}) = a_2$. Prin urmare, $\alpha \leq \beta$. □

Propoziția 2.40

Pentru orice mulțime infinită A , $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.41

Fie A o mulțime infinită și $\mathcal{P}_f(A)$ mulțimea tuturor submulțimilor finite ale lui A . Atunci $|\mathcal{P}_f(A)| = |A|$.

Dem.: Definim funcția $g : A \rightarrow \mathcal{P}_f(A)$, $g(a) = \{a\}$. Deoarece g este injectivă, rezultă că

$$|A| \leq |\mathcal{P}_f(A)|.$$

Prin urmare, $\mathcal{P}_f(A)$ este o mulțime infinită. Fie $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_f(A) - \{\emptyset\}$. Conform Propoziției 2.16, avem că $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}_f(A)|$.

Definim $h : \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n \rightarrow \mathcal{P}'$ astfel:

dacă $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ($n \geq 1$), atunci $h(a) = A'$, unde A' este mulțimea obținută luând toți a_i diferiți.

Se observă ușor că h este surjectivă. Aplicând Propozițiile 2.39 și 2.40, rezultă că $|\mathcal{P}_f(A)| = |\mathcal{P}'| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n| = |A|$.

Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein. □

Propoziția 2.42

- (i) Dacă A este numărabilă, atunci A^k este numărabilă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.
- (ii) Orice submulțime infinită a unei mulțimi numărabile este numărabilă.
- (iii) O reuniune cel mult numărabilă de mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.
- (iv) \mathbb{Z} este numărabilă.
- (v) \mathbb{Q} este numărabilă.

Dem.:

- (i) Avem că $|A| = \aleph_0$. Prin urmare, $|A^k| = \aleph_0^k = \aleph_0$, conform Propoziției 2.28.
- (ii) Fie B o mulțime numărabilă și $A \subseteq B$ o mulțime infinită. Atunci $|A| \leq |B| = \aleph_0$. Pe de altă parte, avem din Propoziția 2.14 că $\aleph_0 \leq |A|$. Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein.

- (iii) Fie I o mulțime cel mult numărabilă (deci $|I| \leq \aleph_0$) și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi cel mult numărabile. Rezultă că $|A_i| \leq \aleph_0$ pentru orice $i \in I$. Obținem

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| &\leq \aleph_0 \cdot |I| \quad \text{conform Propoziției 2.38} \\ &\leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 \quad \text{din Propoziția 2.26.(iii)} \\ &= \aleph_0 \quad \text{din Propoziția 2.27.} \end{aligned}$$

- (iv) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup A$, unde $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{-n\}$. Aplicăm (iii) de două ori pentru a obține că A este cel mult numărabilă și, apoi, că \mathbb{Z} este cel mult numărabilă. Cum \mathbb{Z} este infinită, avem că \mathbb{Z} este numărabilă.

- (v) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ și $f_n : \mathbb{Z} \rightarrow A_n$, $f_n(m) = \frac{m}{n}$. Este evident că f_n este bijectivă, deci A_n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, aplicăm (iii) și faptul că \mathbb{Q} este infinită. □

Propoziția 2.43

$2^{\aleph_0} = c$.

Dem.: Demonstrăm că $c = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ și apoi aplicăm Propoziția 2.37.(i). Definim următoarea funcție

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_A(i)}{3^i}.$$

Demonstrăm că seria considerată mai sus este convergentă. Deoarece seria este cu termeni pozitivi, e suficient să arătăm că șirul sumelor parțiale $\left(\sum_{i=0}^n \frac{2\chi_A(i)}{3^i}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ este majorat. Observăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\sum_{i=0}^n \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq \sum_{i=0}^n \frac{2}{3^i} = 2 \sum_{i=0}^n \frac{1}{3^i} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} < 3.$$

Așadar, Φ este bine definită.

Afirmația 1: Φ este injectivă.

Demonstrație: Presupunem că $A \neq B$ și demonstrăm că $\Phi(A) \neq \Phi(B)$. Deoarece A și B sunt diferite, există $l := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \chi_A(i) \neq \chi_B(i)\}$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $\chi_A(l) = 0$ și $\chi_B(l) = 1$. Definim

$$a := \sum_{i=0}^{l-1} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \text{ dacă } l \neq 0 \text{ și } a := 0 \text{ dacă } l = 0.$$

Pentru orice $n \geq l + 1$ avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{2\chi_A(i)}{3^i} &= a + \frac{2 \cdot 0}{3} + \sum_{i=l+1}^n \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq a + \frac{2}{3^{l+1}} \sum_{i=0}^{n-l-1} \frac{1}{3^i} \\ &= a + \frac{2}{3^{l+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-l}}{1 - \frac{1}{3}} < a + \frac{2}{3^{l+1}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = a + \frac{1}{3^l}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\Phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq a + \frac{1}{3^l}.$$

Pentru orice $n \geq l + 1$ avem

$$\sum_{i=0}^n \frac{2\chi_B(i)}{3^i} = a + \frac{2 \cdot 1}{3^l} + \sum_{i=l+1}^n \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^l}.$$

Așadar,

$$\Phi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^l} > a + \frac{1}{3^l}.$$

Obținem astfel că $\Phi(A) < \Phi(B)$, deci $\Phi(A) \neq \Phi(B)$. ■

Cum Φ este injectivă, avem că

$$(*) \quad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq \mathfrak{c}.$$

Deoarece \mathbb{Q} este numărabilă, există o bijecție $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Definim funcția

$$\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \Psi(r) = \{n \in \mathbb{N} \mid j(n) \leq r\}.$$

Afirmația 2: Ψ este injectivă.

Demonstrație: Fie $r_1 \neq r_2$ două numere reale. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $r_1 < r_2$. Deoarece \mathbb{Q} este densă în \mathbb{R} , există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r_1 < q < r_2$. Cum j este bijectivă, există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $j(m) = q$. Rezultă că $m \in \Psi(r_2)$ și $m \notin \Psi(r_1)$, demonstrând astfel că $\Psi(r_1) \neq \Psi(r_2)$. ■

Prin urmare,

$$(**) \quad \mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a obține, din (*) și (**), că $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. □

Propoziția 2.44

\mathbb{R} nu este numărabilă.

Dem.: Aplicând Propozițiile 2.43 și 2.37.(ii), obținem că $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, deci $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$. □

Lema 2.45

Pentru orice numere reale $a < b$, $c < d$, $|(a, b)| = |(c, d)|$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.46

Pentru orice numere reale $a < b$,

$$|(a, b)| = |[a, b]| = |(a, b]| = |[a, b]| = \mathfrak{c}.$$

Dem.: Exercițiu.