Logică Matematică

Anul I, Semestrul II 2022

Laurențiu Leuștean

Pagina web: https://cs.unibuc.ro//~lleustean/Teaching/2022-LOGICMATH/index.html

Preliminarii

Operații cu mulțimi

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \\ A \cap B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\} \\ A - B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \\ C_T A &= T - A = \{x \in T \mid x \notin A\} \end{aligned}$$

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Z}$ este mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale; $\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar, $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

Exemplu. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Produsul cartezian

Notăm cu (a, b) perechea ordonată formată din a și b (care sunt componentele lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$; $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale ddacă $a = c$ și $b = d$.

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

Funcții

Fie A și B mulțimi și $f : A \to B$ o funcție.
Spunem că f este definită pe A cu valori în B, A se numește domeniul de definiție al funcției f și B se numește domeniul valorilor lui f sau codomeniul lui f.

Notație: Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $Fun(A, B)$, B^A sau $(A \to B)$.

Fie $f : A \to B$ o funcție, $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui X prin f; $f(A)$ este imaginea lui f.
- $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui Y prin f.
- Fie $f|_X : X \to B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este restricția lui f la X.

Funcții

Fie $f : A \to B$ o funcție.

- f este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- f este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- f este bijectivă dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcții

Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcția identică a lui A este $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

O funcție $f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Funcția g este unică, se numește inversa lui f și se notează f^{-1}.

O funcție este bijectivă ddacă este inversabilă.

Fie $f : A \to A$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim $f^n : A \to A$ astfel:

$$f^0 = 1_A, \quad f^{n+1} = f^n \circ f \text{ pentru } n \geq 0.$$

Funcția caracteristică

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. Funcția caracteristică a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăți

Dacă $A, B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

$$\chi_{A\cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{C_T A}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Observație

Funcția caracteristică se poate folosi pentru a arăta că două mulțimi sunt egale: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.

Definiție

O relație binară între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.
O relație binară pe A este o submulțime a lui $A \times A$.

Exemple

- $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$| \; = \{(k, n) \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$$

- $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$< \; = \{(k, n) \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$$

Operații cu relații

Fie A, B, C mulțimi.

Definiție

- Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci relația inversă $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:
$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$
- Dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$, atunci compunerea lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:
$$Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{ există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}.$$
- Diagonala lui A este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Exercițiu

- Compunerea relațiilor este asociativă.
- Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.

Relații binare

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A \times A$ o relație binară pe A.
Notație: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiție

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,
$$xRy \text{ și } yRx \text{ implică } x = y.$$
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
$$xRy \text{ și } yRz \text{ implică } xRz.$$
- R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.

Relații de echivalență

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Notații: Vom nota relațiile de echivalență cu $\sim$. Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulțime nevidă și $\sim$ o relație de echivalență pe A.

Definiție

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalență $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Proprietăți

- $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numeșt mulțimea cât a lui A prin $\sim$ și se notează $A/\!\sim$.
Aplicația $\pi : A \to A/\!\sim, \quad \pi(x) = [x]$ se numește funcția cât.

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A este relație de

- ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

Definiție

Dacă $\leq$ este o relație de ordine parțială (totală) pe A, spunem că $(A, \leq)$ este mulțime parțial (total) ordonată.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Proprietăți

- Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulțime parțial ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in S$ se numește

- element minimal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- element maximal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $e \leq$ a implică $a = e$;
- cel mai mic element (sau minim) al lui S, notat $\min S$, dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- cel mai mare element (sau maxim) al lui S, notat $\max S$, dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$.

Proprietăți

- Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- Dacă $\min S$ există, atunci $\min S$ este element minimal al lui S.
- Dacă $\max S$ există, atunci $\max S$ este element maximal al lui S.
- S poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.
- Un element minimal (maximal) al lui S nu este în general minim (maxim) al lui S.

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in A$ se numește

- **majorant** al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$;
- **minorant** al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- **supremum** al lui S, notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S;
- **infimum** al lui S, notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S.

Proprietăți

- Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui S pot fi vide.
- Atât supremumul, cât și infimumul lui S sunt unice (dacă există).

Mulțimi bine ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

Spunem că $(A, \leq)$ este mulțime bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a lui A are minim. În acest caz, $\leq$ se numește relație de bună ordonare pe A.

Exemple

$(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, \leq)$ nu este bine ordonată.

Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.

Mulțimi inductiv ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

$(A, \leq)$ se numește inductiv ordonată dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.

Lema lui Zorn

Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.

• un instrument foarte util în demonstrații.

Familii

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O familie de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i, obținem o familie (indexată) de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$.
Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T. Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}\\ \bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}\end{aligned}$$

Dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i, j \in I, i \neq j$, spunem că $\bigcup_{i\in I} A_i$ este o reuniune disjunctă.

Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j, \quad \pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ se numește proiecție canonică a lui $\prod_{i\in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j \text{ și } \bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j.$$

$I = \{1, \ldots, n\}$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \ldots, n\}$ și A_1, ..., $A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un n-tuplu (ordonat)
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Definiție

O relație n-ară între A_1, ..., A_n este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$.
O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n. Dacă R este relație n-ară, spunem că n este aritatea lui R.

Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice*) (AC)*

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

- formulată de Zermelo (1904)
- a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcția alegere f_C.

Reformulare

Următoarea afirmație este echivalentă cu Axioma alegerii:
Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este o mulțime nevidă.

Axioma alegerii

- Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- Lema lui Zorn
- Principiul bunei ordonări: Orice mulțime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relație binară $\leq$ pe X a.î. $(X, \leq)$ este mulțime bine ordonată).

H. Rubin, J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, Elsevier, 1985

Definiția 1.1

Spunem că A este echipotentă cu B dacă există o bijecție $f : A \to B$. Notație: $A \sim B$.

Propoziția 1.2

Pentru orice mulțimi A, B, C au loc:

(i) $A \sim A$;

(ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.

(iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B ddacă B este echipotentă cu A. De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

Mulțimi finite, numărabile

Definiția 1.3

O mulțime A se numește finită dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. În acest caz, notăm cu $|A|$ numărul elementelor lui A.

O mulțime care nu este finită se numește infinită.

Definiția 1.4

O mulțime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.

O mulțime finită sau numărabilă se numește cel mult numărabilă.

Exemple

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.
- Orice submulțime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Teoremă Cantor

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este mulțime numărabilă.

Cardinale

Cardinale

Numerele cardinale sau cardinalele sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Definiția 2.1

Pentru orice mulțime A, cardinalul lui A (sau numărul cardinal al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- *$|A|$ este unic determinat de A.*
- *pentru orice mulțimi A, B, avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.*

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A.

Cardinale

Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A.

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A, $|A|$ este tot o mulțime.

Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci clasă. Vom nota cu Card clasa tuturor cardinalelor.

Notăm cardinalele cu α, β, γ, κ, $\ldots$.

Cardinale

Definiția 2.2

α este cardinal ddacă există o mulțime A a.î. $\alpha = |A|$. Spunem, în acest caz, că A este un reprezentant al lui α.

Desigur, orice mulțime echipotentă cu A este, de asemenea, reprezentant al lui α.

Definiția 2.3

Fie $\alpha = |A|$ un cardinal. Dacă A este finită (respectiv infinită), spunem că α este un cardinal finit (respectiv cardinal infinit).

Notații

- Notăm $0 := |\emptyset|$ și, pentru orice $n \geq 1$, $\mathrm{n} := |\{0, 1, \ldots, n-1\}|$.
- $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește *alef zero*).
- $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și puterea continuumului.

Observația 2.4

(i) *O mulțime A este finită ddacă există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathrm{n} = |A|$. Prin urmare, putem identifica cardinalul $|A|$ cu numărul elementelor lui A.*

(ii) *O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.*

Observația 2.5

(i) *Pentru orice mulțime A, $Fun(\emptyset, A)$ are un singur element, funcția vidă. Prin urmare, $|Fun(\emptyset, A)| = 1$.*

(ii) *Pentru orice mulțime nevidă A, $Fun(A, \emptyset) = \emptyset$, deci $|Fun(A, \emptyset)| = 0$.*

Definiția 2.6

Definim următoarea relație: pentru orice cardinale $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$,

$$\alpha \leq \beta \iff \textit{există o funcție injectivă } f : A \to B.$$

Observația 2.7

Definiția relației $\leq$ *nu depinde de reprezentanți.*

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \to A'$ și $v : B \to B'$. Demonstrăm că

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } g : A' \to B'.$$

$\Rightarrow$ Fie $f : A \to B$ o funcție injectivă. Atunci $g := v \circ f \circ u^{-1} : A' \to B'$ este injectivă.
$\Leftarrow$ Avem că $f := v^{-1} \circ g \circ u : A \to B$ este injectivă.
Deci, definiția nu depinde de reprezentanții A și B. $\square$

Cardinale - relația de ordine

Relației $\leq$ se asociază o nouă relație, definită astfel:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \leq \beta \text{ și } \alpha \neq \beta.$$

Propoziția 2.8

(i) *Pentru orice mulțimi A, B, dacă $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$.*

(ii) *Pentru orice cardinal finit α, avem că $\alpha < \aleph_0$.*

(iii) *Pentru orice mulțime A și orice cardinal α, dacă $\alpha \leq |A|$, atunci există o submulțime B a lui A a.î. $|B| = \alpha$.*

(iv) *$0 \leq \alpha$ pentru orice cardinal α.*

(v) *$1 \leq \alpha$ pentru orice cardinal $\alpha \neq 0$.*

(vi) *Relația $\leq$ este reflexivă și tranzitivă.*

Dem.: Exercițiu.

Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 2.9 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \to B$ și $g : B \to A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Dem.: (Schiță). Pentru orice $n \geq 0$, definim

$$h_n := (g \circ f)^n : A \to A, \quad A_n := h_n(A) \subseteq A, \quad B_n := h_n(g(B)) \subseteq A.$$

Evident, $h_0 = 1_A$, $A_0 = A$ și $B_0 = g(B)$. De asemenea, h_n este injectivă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $h_m \circ h_n = h_{m+n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

Afirmația 1: Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$. Prin urmare, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri descrescătoare de mulțimi a.î. $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \bigcap_{n \geq 0} B_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Cardinale - relația de ordine

Introducem următoarele notații:

$$C := \bigcap_{n\geq 0} A_n \quad \text{și, pentru orice } n \in \mathbb{N},\ A'_n := A_n - B_n,\ B'_n := B_n - A_{n+1}.$$

Deoarece h_n, g sunt injective, avem că

$$\begin{aligned} A'_n &= A_n - B_n = h_n(A) - h_n(g(B)) = h_n(A - g(B)), \\ B'_n &= B_n - A_{n+1} = h_n(g(B)) - h_{n+1}(A) \\ &= (h_n \circ g)(B) - (h_n \circ g)(f(A)) = (h_n \circ g)(B - f(A)) \end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Se observă ușor că mulțimile C, $\bigcup_{n\geq 0} A'_n$ și $\bigcup_{n\geq 0} B'_n$ sunt disjuncte două câte două.

Afirmația 2: $A = C \cup \bigcup_{n\geq 0} A'_n \cup \bigcup_{n\geq 0} B'_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Definim

$$\Phi : A \to B, \ \ \Phi(a) = \begin{cases} f(a) & \text{dacă } a \in C \cup \bigcup_{n\geq 0} A'_n \\ b & \text{dacă } a \in \bigcup_{n\geq 0} B'_n \text{ și } b \text{ este unicul element} \\ & \text{din } B \ \text{ a.î. } \ g(b) = a. \end{cases}$$

Observăm că Φ e bine definită pe a doua ramură: deoarece

$$\bigcup_{n\geq 0} B'_n \subseteq \bigcup_{n\geq 0} B_n = B_0 = g(B),$$

avem, în acest caz, $a \in g(B)$. Din injectivitatea funcției g, rezultă că există un unic $b \in B$ a.î. $g(b) = a$.

Afirmația 3: Φ este bijectivă.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Prin urmare, $A \sim B$. $\square$

O reformulare a Teoremei Cantor-Schröder-Bernstein este

Teorema 2.10

Relația $\leq$ este antisimetrică, adică pentru orice cardinale α, β avem:

$$\alpha \leq \beta \text{ și } \beta \leq \alpha \text{ implică } \alpha = \beta.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Atunci

- $\alpha \leq \beta$ ddacă există o funcție injectivă $f : A \to B$.
- $\beta \leq \alpha$ ddacă există o funcție injectivă $g : B \to A$.
- $\alpha = \beta$ ddacă $A \sim B$. $\square$

Teorema 2.11

Relația $\leq$ este totală, adică pentru orice cardinale α, β avem că $\alpha \leq \beta$ sau $\beta \leq \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A \text{ și } f : X \to B \text{ este funcție injectivă}\}.$$

Evident, $\mathcal{F}$ este nevidă. Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \Longleftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 1: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g). Deoarece $Y \subseteq A$ și $g : Y \to B$ este injectivă, avem că $|Y| \leq \alpha$ și $|Y| \leq \beta$. Distingem următoarele două cazuri:

- g este surjectivă. Atunci g este bijectivă, deci $|Y| = |B|$. Obținem că $\beta = |B| = |Y| \leq \alpha$.
- g nu este surjectivă. Atunci există $b \in B - g(Y)$. Dacă $Y \neq A$, luăm $a \in A - Y$ și definim funcția $f : Y \cup \{a\} \to B$ astfel:
$$f|_Y = g \text{ și } f(a) = b.$$
Se observă ușor că $(Y \cup \{a\}, f) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup \{a\}, f)$, ceea ce este o contradicție cu faptul că (Y, g) este element maximal al lui $\mathcal{F}$. Prin urmare, trebuie să avem $Y = A$. Rezultă atunci că $\alpha = |A| = |Y| \leq \beta$. $\square$

Teorema 2.12

Relația $\leq$ este o relație de ordine totală.

Dem.: Exercițiu.

Rezultă ușor că

Corolar 2.13

Relația $<$ este o relație de ordine strictă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.14

Pentru orice mulțime infinită A, $\aleph_0 \leq |A|$. Prin urmare, orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.

Dem.: Definim inductiv șirul $(a_n)_{n\in N}$ din A cu proprietatea că $a_i \neq a_j$ pentru orice $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$.
Deoarece A este nevidă, există $a_0 \in A$.
Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci există $a_1 \in A$ a.î. $a_1 \neq a_0$.
Cum A este infinită, $A - \{a_0, a_1\}$ este nevidă, deci există $a_2 \in A$ a.î. $a_2 \neq a_0$ și $a_2 \neq a_1$.
În general, presupunem că am definit $a_0, \ldots, a_n \in A$ distincte două câte două. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \ldots, a_n\}$ este nevidă, deci există $a_{n+1} \in A$ diferit de toți $a_0, \ldots, a_n$.

Definind funcția $f : \mathbb{N} \to A$ prin $f(n) = a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că f este injectivă. Prin urmare, $\aleph_0 \leq |A|$.

Deoarece f este injectivă, avem că $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$. Rezultă că $f(\mathbb{N})$ este o submulțime numărabilă a lui A. $\square$

Propoziția 2.15

Fie α un cardinal finit și β un cardinal infinit. Atunci $\alpha < \beta$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.16

Fie A o mulțime infinită și $F \subseteq A$ o submulțime finită a sa. Atunci $|A - F| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.17

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale, reprezentanții A și B fiind aleși a.î. $A \cap B = \emptyset$. Definim suma cardinalelor α și β prin

$$\alpha + \beta := |A \cup B|.$$

Observația 2.18

Observăm mai întâi că pentru orice cardinale α, β putem alege mulțimi A, B cu $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$ și $A \cap B = \emptyset$. Într-adevăr, dacă $\alpha = |U|$ și $\beta = |V|$, atunci luăm $A = U \times \{1\}$ și $B = V \times \{2\}$.

Observația 2.19

Definiția operației $+$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$ cu $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Considerăm bijecțiile $u : A \to A'$ și $v : B \to B'$. Definim

$$f : A \cup B \to A' \cup B', \quad f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in A \\ v(x) & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare, $\alpha + \beta = |A \cup B| = |A' \cup B'|$. $\square$

Suma cardinalelor

Propoziția 2.20

(i) 0 *este element neutru al lui* $+$.

(ii) *Operația* $+$ *este comutativă și asociativă.*

(iii) *Pentru orice cardinale* α, β, γ,

$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha + \beta \leq \alpha + \gamma.$$

În particular, $\alpha \leq \alpha + \gamma$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.21

Pentru orice cardinal infinit α, avem $\alpha + \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid \emptyset \neq X \subseteq A$ și $f : X \times \{0, 1\} \to X$ este funcție bijectivă$\}$.

Afirmația 1: $\mathcal{F}$ este nevidă.

Dem.: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a lui A. Definim

$$f : X \times \{0, 1\} \to X, \quad f(x_n, 0) = x_{2n},\ f(x_n, 1) = x_{2n+1}.$$

Se observă ușor că f este bijecție. Prin urmare, $(X, f) \in \mathcal{F}$. $\blacksquare$.

Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1 \times \{0,1\}} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Demonstrație: Fie $\mathcal{G} = (X_i, f_i)_{i \in I}$ o submulțime total ordonată a lui $\mathcal{F}$. Fie $X := \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq A$. Definim $f : X \times \{0, 1\} \to X$ astfel:

dacă $x \in X$, alegem un $i \in I$ a.î. $x \in X_i$ și definim
$f(x, t) = f_i(x, t)$ pentru orice $t \in \{0, 1\}$.

Definiția lui f este corectă, deoarece pentru orice $i, j \in I, i \neq j$, dacă $x \in X_i \cap X_j$, atunci $f_i(x, t) = f_j(x, t)$. De asemenea, se observă ușor că $(X_i, f_i) \leq (X, f)$ pentru orice $i \in I$.
Rămâne să mai arătăm că f este bijectivă.

Demonstrăm că f este surjectivă. Fie $y \in X$ arbitrar. Atunci există $i \in I$ a.î. $y \in X_i$. Deoarece f_i este surjectivă, există $x \in X_i$, $t \in \{0, 1\}$ a.î. $f_i(x, t) = y$. Conform definiției lui f, rezultă că $f(x, t) = f_i(x, t) = y$.

Demonstrăm că f este injectivă. Fie $x, y \in X, s, t \in \{0, 1\}$ a.î. $f(x, s) = f(y, t)$. Atunci există $i, j \in I$ a.î. $x \in X_i$ și $y \in X_j$. Rezultă că $f(x, s) = f_i(x, s)$ și $f(y, t) = f_j(y, t)$, deci $f_i(x, s) = f_j(y, t)$. Deoarece $\mathcal{G}$ este total ordonată, avem următoarele două posibilități:

- $(X_i, f_i) \leq (X_j, f_j)$. Atunci $x \in X_i \subseteq X_j$ și $f_j|_{X_i \times \{0,1\}} = f_i$, deci $f_j(x, s) = f_i(x, s)$. Obținem că $f_j(x, s) = f_j(y, t)$. Deoarece f_j este injectivă, rezultă că $x = y$ și $s = t$.
- $(X_j, f_j) \leq (X_i, f_i)$. Se demonstrează similar că $x = y$ și $s = t$.

  ■

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g). Așadar, $\emptyset \neq Y \subseteq A$ și $g : Y \times \{0, 1\} \to Y$ este bijecție, deci $|Y \times \{0, 1\}| = |Y|$.

Afirmația 3: $A - Y$ este finită.

Demonstrație: Presupunem că $A - Y$ este infinită. Din Propoziția 2.14, rezultă că $A - Y$ are o submulțime numărabilă C. Obținem, ca în demonstrația Afirmației 1, o bijecție $h : C \times \{0, 1\} \to C$. Definim

$$p : (Y \cup C) \times \{0, 1\} \to Y \cup C, \quad p(x, t) = \begin{cases} g(x, t) & \text{dacă } x \in Y \\ h(x, t) & \text{dacă } x \in C. \end{cases}$$

Deoarece g și h sunt bijecții, se arată ușor că p este, de asemenea, bijecție. Rezultă că $(Y \cup C, p) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup C, p)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui (Y, g). Prin urmare, $A - Y$ este finită. ∎

Aplicând Propoziția 2.16, avem că $|Y| = |A - (A - Y)| = |A| = \alpha$. Obținem

$$\begin{aligned} \alpha &= |Y| = |Y \times \{0,1\}| = |(Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})| \\ &= |Y \times \{0\}| + |Y \times \{1\}| = |Y| + |Y| = \alpha + \alpha. \qquad \square \end{aligned}$$

Propoziția 2.22

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha + \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.23

Fie α, β cardinale a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Exercițiu.

Produsul cardinalelor

Definiția 2.24

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim produsul cardinalelor α și β prin

$$\alpha \cdot \beta := |A \times B|.$$

Observația 2.25

Definiția operației $\cdot$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \to A'$ și $v : B \to B'$. Definim

$$f : A \times B \to A' \times B', \quad f(a, b) = (u(a), v(b)).$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare, $\alpha \cdot \beta = |A \times B| = |A' \times B'|$. $\square$

Produsul cardinalelor

Propoziția 2.26

(i) $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$ *pentru orice cardinal* α.

(ii) 1 *este element neutru al lui* $\cdot$.

(iii) *Pentru orice cardinale* α, β, γ,

$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma.$$

(iv) *Pentru orice cardinale* α, β *a.î.* $\beta \neq 0$, $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$.

(v) *Operația* $\cdot$ *este comutativă, asociativă și distributivă față de* $+$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.27

Pentru orice cardinal infinit α, avem $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A, X \text{ infinită și } f : X \to X \times X \text{ este funcție bijectivă}\}.$$

Afirmația 1: $\mathcal{F}$ este nevidă.

Demonstrație: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $B \subseteq A$. Prin urmare, există o bijecție $g : B \to \mathbb{N}$. Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, există o bijecție $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definim

$$h : B \times B \to B, \quad h(x, y) = (g^{-1} \circ f)(g(x), g(y)).$$

Se arată ușor că h este bijecție. Rezultă că $(B, h^{-1}) \in \mathcal{F}$. ∎

Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \Longleftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g). Fie $\beta := |Y|$. Cum Y este o submulțime infinită a lui A, avem că β este un cardinal infinit și $\beta \leq \alpha$. Deoarece $g : Y \to Y \times Y$ este bijecție, avem că

$$(*) \quad \beta = |Y| = |Y \times Y| = |Y| \cdot |Y| = \beta \cdot \beta.$$

Afirmația 3: $\beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Aplicăm acum $(*)$ pentru a conclude că $\alpha \cdot \alpha = \alpha$. □

Produsul cardinalelor

Definim inductiv α^n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ astfel:

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha.$$

Propoziția 2.28

Pentru orice cardinal infinit α și orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^n = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.29

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $0 \neq \beta \leq \alpha$, atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.30

Fie α, β cardinale nenule a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Presupunem că α este infinit. Deoarece $\leq$ este totală, avem următoarele două cazuri:

- $\beta \leq \alpha$. Atunci $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ și $\alpha \cdot \beta = \alpha$, conform Propoziției 2.29.
- $\alpha \leq \beta$. Atunci β este, de asemenea, infinit, $\max\{\alpha, \beta\} = \beta$ și $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = \beta$, conform Propoziției 2.29. □

Definiția 2.31

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim

$$\alpha^{\beta} := |A^{B}| = |Fun(B, A)|.$$

Observația 2.32

Definiția lui α^{β} nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \to A'$ și $v : B \to B'$. Definim $\Phi : Fun(B, A) \to Fun(B', A')$ astfel:

pentru orice funcție $f : B \to A$, $\quad \Phi(f) := u \circ f \circ v^{-1} : B' \to A'$.

Se demonstrează ușor că Φ este inversabilă, inversa sa fiind

$$\Psi : Fun(B', A') \to Fun(B, A), \quad \Psi(g) = u^{-1} \circ g \circ v$$

Prin urmare, $\alpha^{\beta} = |Fun(B, A)| = |Fun(B', A')|$. $\square$

Observația 2.33

(i) *Pentru orice cardinal* α, $1^\alpha = 1, \alpha^0 = 1$.

(ii) *Pentru orice cardinal nenul* α, $0^\alpha = 0$.

Dem.: Exercițiu.

Lema 2.34

Fie A, B, C *mulțimi. Atunci*

(i) $Fun(A, Fun(B, C)) \sim Fun(A \times B, C)$.

(ii) $Fun(A, B \times C) \sim Fun(A, B) \times Fun(A, C)$.

(iii) *Dacă în plus* $A \cap B = \emptyset$, *atunci* $Fun(A \cup B, C) \sim Fun(A, C) \times Fun(B, C)$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.35

Fie α, β, γ cardinale arbitrare.

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$, $\quad (\alpha \cdot \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$ *și* $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

(ii) *Dacă* $\alpha \leq \beta$, *atunci* $\alpha^{\gamma} \leq \beta^{\gamma}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.36

Fie α un cardinal infinit și β un cardinal a.î. $2 \leq \beta \leq 2^{\alpha}$. Atunci $\beta^{\alpha} = 2^{\alpha}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.37

Fie α un cardinal.

(i) *Pentru orice reprezentant A al lui α, are loc $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.*

(ii) $\alpha < 2^\alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$.

(i) Avem că $2^\alpha = |Fun(A, \{0, 1\})|$. Definim

$$\Psi : \mathcal{P}(A) \to Fun(A, \{0, 1\}), \quad \Psi(B) = \chi_B,$$

unde χ_B este funcția caracteristică a submulțimii B a lui A. Se demonstrează ușor că Ψ este bijectivă.

(ii) Deoarece funcția $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(a) = \{a\}$ este injectivă, avem că $\alpha \leq 2^\alpha$. Conform (S1.1), nu există funcții surjective cu domeniul A și codomeniul $\mathcal{P}(A)$. Rezultă că $\alpha \neq 2^\alpha$. Prin urmare, $\alpha < 2^\alpha$. $\square$

Propoziția 2.38

Fie α un număr cardinal și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi a.î. $|A_i| \leq \alpha$ pentru orice $i \in I$. Atunci

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \alpha \cdot |I|.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Pentru orice $i \in I$, deoarece $|A_i| \leq \alpha$, există o funcție injectivă $f_i : A_i \to A$.

Definim $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to A \times I$ astfel:

dacă $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$, alegem $i_a \in I$ cu $a \in A_{i_a}$ și definim

$$f(a) = (f_{i_a}(a), i_a).$$

Rezultă ușor că f este injectivă: dacă $a, b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ sunt a.î. $(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ și $f_{i_a}(a) = f_{i_b}(b)$. Rezultă că $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă.

Prin urmare, $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq |A \times I| = \alpha \cdot |I|$. $\square$

Propoziția 2.39

Fie $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ două cardinale nenule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $\alpha \leq \beta$.

(ii) *Există o funcție surjectivă $g : B \to A$.*

Dem.: (i)⇒(ii) Fie $f : A \to B$ injectivă. Fixăm $a_0 \in A$. Definim

$$g : B \to A, \quad g(b) = \begin{cases} a_0 & \text{dacă } b \in B - f(A) \\ a & \text{dacă } b \in f(A) \text{ și } a \text{ este unicul element} \\ & \text{din } A \text{ a.î. } f(a) = b. \end{cases}$$

Deoarece f este injectivă, g este bine definită. De asemenea, se observă imediat că g este surjectivă.

(ii)$\Rightarrow$(i) Fie $g : B \to A$ surjectivă. Pentru fiecare $a \in A$, alegem un element $b_a \in B$ a.î. $g(b_a) = a$. Definim

$$f : A \to B, \quad f(a) = b_a.$$

Se arată ușor că f este injectivă: dacă $a_1, a_2 \in A$ a.î. $b_{a_1} = b_{a_2}$, atunci $a_1 = g(b_{a_1}) = g(b_{a_2}) = a_2$. Prin urmare, $\alpha \leq \beta$. $\square$

Propoziția 2.40

Pentru orice mulțime infinită A, $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A^n| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.41

Fie A o mulțime infinită și $\mathcal{P}_f(A)$ mulțimea tuturor submulțimilor finite ale lui A. Atunci $|\mathcal{P}_f(A)| = |A|$.

Dem.: Definim funcția $g : A \to \mathcal{P}_f(A)$, $g(a) = \{a\}$. Deoarece g este injectivă, rezultă că

$$|A| \leq |\mathcal{P}_f(A)|.$$

Prin urmare, $\mathcal{P}_f(A)$ este o mulțime infinită. Fie $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_f(A) - \{\emptyset\}$.
Conform Propoziției 2.16, avem că $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}_f(A)|$.
Definim $h : \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A^n \to \mathcal{P}'$ astfel:

dacă $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ $(n \geq 1)$, atunci $h(a) = A'$, unde A' este mulțimea obținută luând toți a_i diferiți.

Se observă ușor că h este surjectivă. Aplicând Propozițiile 2.39 și 2.40, rezultă că $|\mathcal{P}_f(A)| = |\mathcal{P}'| \leq \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A^n\right| = |A|$.
Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein. $\square$

Propoziția 2.42

(i) *Dacă A este numărabilă, atunci A^k este numărabilă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.*

(ii) *Orice submulțime infinită a unei mulțimi numărabile este numărabilă.*

(iii) *O reuniune cel mult numărabilă de mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.*

(iv) *$\mathbb{Z}$ este numărabilă.*

(v) *$\mathbb{Q}$ este numărabilă.*

Dem.:

(i) Avem că $|A| = \aleph_0$. Prin urmare, $|A^k| = \aleph_0^k = \aleph_0$, conform Propoziției 2.28.

(ii) Fie B o mulțime numărabilă și $A \subseteq B$ o mulțime infinită. Atunci $|A| \leq |B| = \aleph_0$. Pe de altă parte, avem din Propoziția 2.14 că $\aleph_0 \leq |A|$. Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein.

(iii) Fie I o mulțime cel mult numărabilă (deci $|I| \leq \aleph_0$) și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi cel mult numărabile. Rezultă că $|A_i| \leq \aleph_0$ pentru orice $i \in I$. Obținem

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| &\leq \aleph_0 \cdot |I| \quad \text{conform Propoziției 2.38} \\ &\leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 \quad \text{din Propoziția 2.26.(iii)} \\ &= \aleph_0 \quad \text{din Propoziția 2.27.} \end{aligned}$$

(iv) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup A$, unde $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{-n\}$. Aplicăm (iii) de două ori pentru a obține că A este cel mult numărabilă și, apoi, că $\mathbb{Z}$ este cel cel mult numărabilă. Cum $\mathbb{Z}$ este infinită, avem că $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(v) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ și $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, $f_n(m) = \frac{m}{n}$. Este evident că f_n este bijectivă, deci A_n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, aplicăm (iii) și faptul că $\mathbb{Q}$ este infinită. $\square$

Propoziția 2.43

$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Dem.: Demonstrăm că $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ și apoi aplicăm Propoziția 2.37.(i). Definim următoarea funcție

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_A(i)}{3^i}.$$

Demonstrăm că seria considerată mai sus este convergentă. Deoarece seria este cu termeni pozitivi, e suficient să arătăm că șirul sumelor parțiale $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este majorat. Observăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{3^i} = 2\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} < 3.$$

Așadar, Φ este bine definită.

Afirmația 1: Φ este injectivă.

Demonstrație: Presupunem că $A \neq B$ și demonstrăm că $\Phi(A) \neq \Phi(B)$. Deoarece A și B sunt diferite, există $l := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \chi_A(i) \neq \chi_B(i)\}$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $\chi_A(l) = 0$ și $\chi_B(l) = 1$. Definim

$$a := \sum_{i=0}^{l-1} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \text{ dacă } l \neq 0 \quad \text{și} \quad a := 0 \text{ dacă } l = 0.$$

Pentru orice $n \geq l+1$ avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} &= a + \frac{2 \cdot 0}{3} + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq a + \frac{2}{3^{l+1}} \sum_{i=0}^{n-l-1} \frac{1}{3^i} \\ &= a + \frac{2}{3^{l+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-l}}{1 - \frac{1}{3}} < a + \frac{2}{3^{l+1}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = a + \frac{1}{3^l}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\Phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq a + \frac{1}{3^l}.$$

Pentru orice $n \geq l + 1$ avem

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \quad = \quad a + \frac{2 \cdot 1}{3^l} + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^l}.$$

Așadar,

$$\Phi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^l} > a + \frac{1}{3^l}.$$

Obținem astfel că $\Phi(A) < \Phi(B)$, deci $\Phi(A) \neq \Phi(B)$. ■

Cum Φ este injectivă, avem că

$$(*) \quad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq \mathfrak{c}.$$

Deoarece $\mathbb{Q}$ este numărabilă, există o bijecție $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Definim funcția

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \Psi(r) = \{n \in \mathbb{N} \mid j(n) \leq r\}.$$

Afirmația 2: Ψ este injectivă.

Demonstrație: Fie $r_1 \neq r_2$ două numere reale. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $r_1 < r_2$. Deoarece $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$, există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r_1 < q < r_2$. Cum j este bijectivă, există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $j(m) = q$. Rezultă că $m \in \Psi(r_2)$ și $m \notin \Psi(r_1)$, demonstrând astfel că $\Psi(r_1) \neq \Psi(r_2)$. ■

Prin urmare,

$$(**) \quad \mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a obține, din (*) și (**), că $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. □

Propoziția 2.44

$\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

Dem.: Aplicând Propozițiile 2.43 și 2.37.(ii), obținem că $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, deci $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$. □

Lema 2.45

Pentru orice numere reale $a < b$, $c < d$, $|(a, b)| = |(c, d)|$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.46

Pentru orice numere reale $a < b$,

$$|(a, b)| = |[a, b)| = |(a, b]| = |[a, b]| = \mathfrak{c}.$$

Dem.: Exercițiu.