

# Logică Matematică

Anul I, Semestrul II 2022

Laurențiu Leuștean

Pagina web: <http://cs.unibuc.ro/~lleustean/>

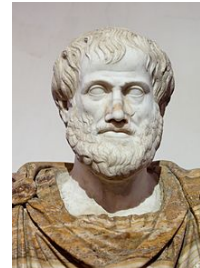
În prezentarea acestui curs sunt folosite și slideuri ale Ioanei Leuștean din Semestrul I 2014/2015.

1

## Ce este logica?

**logiké tékhné** = știința raționamentelor; **logos** = cuvânt, raționament

Aristotel (IV î.e.n.)



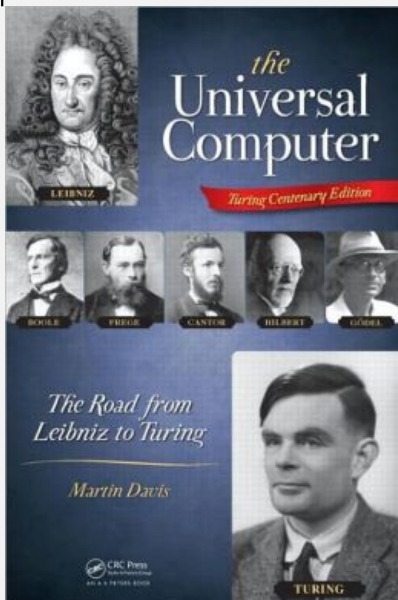
- ▶ <http://plato.stanford.edu/entries/aristotle-logic/>
- ▶ primul studiu formal al logicii
- ▶ a studiat **silogismele**, deducții formate din două premise și o concluzie.

**Barbara**

Premiză	Toți oamenii sunt muritori.
Premiză	Grecii sunt oameni.
Concluzie	Deci grecii sunt muritori.

2

## Logică și Informatică



"... a computing machine is really a logic machine. Its circuits embody the distilled insights of a remarkable collection of logicians, developed over century. Nowadays, as computer technology advances with such breathtaking rapidity, as we admire the truly accomplishments of the engineers, it is all too easy to overlook the logicians whose ideas made it all possible. This book tells their story."

3

## Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 -1716)

Visul lui Leibniz

- ▶ un limbaj matematic universal (**lingua characteristica universalis**) în care toată cunoașterea umană poate fi exprimată și reguli de calcul (**calculus ratiocinator**) pentru a deriva, cu ajutorul mașinilor, toate relațiile logice:

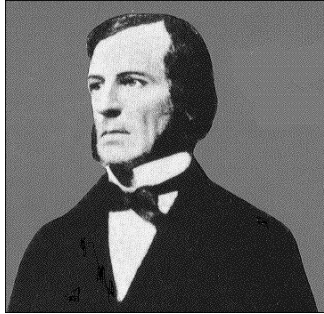


"If controversies were to arise, there would be no more need of disputation between two philosophers than between two accountants. For it would suffice to take their pencils in their hands, and say to each other: *Calcuemus - Let us calculate.*"

4

## George Boole (1815-1864)

- ▶ **The Mathematical Analysis of Logic** (1847), **The Laws of Thought** (1854): a inițiat analiza raționamentelor logice prin metode asemănătoare calculului algebric.
- ▶ Silogismele lui Aristotel sunt despre **clase** de obiecte, care pot fi studiate algebric.



*"The design of the following treatise is to investigate the fundamental laws of the operations of the mind by which reasoning is performed; to give expressions to them in the symbolic language of calculus, and upon this foundation to establish the science of logic and constructs its methods."*

5

## Gottlob Frege (1848-1925)

### *Begriffsschrift* (1879)

- ▶ A introdus sintaxa formală: obiecte, predicate, funcții; conectori propoziționali; cuantificatori.
- ▶ A inventat logica de ordinul întâi.
- ▶ **van Heijenoort**, *From Frege to Gödel*, 1967: "perhaps the most important single work ever written in logic."



Exemplu:

- ▶ Toți oamenii sunt muritori.
- ▶ Pentru orice  $x$ , dacă  $x$  este om, atunci  $x$  este muritor.
- ▶  $\forall x(Om(x) \rightarrow Muritor(x))$ .

6

## Georg Cantor (1848-1925)

- ▶ A inventat teoria mulțimilor.
- ▶ A definit numerele cardinale, ordinale.
- ▶ A dezvoltat o teorie matematică a **infinitului**.



*Hilbert:*

*"No one shall be able to expel us from the paradise that Cantor created for us."*

7

## Georg Cantor (1848-1925)

- ▶ **Aristotel**: "*Infinitum Actu Non Datur*" - nu există infinit actual.
- ▶ **Leibniz**: "*I am so in favor of the actual infinite that instead of admitting that Nature abhors it, I hold that Nature makes frequent use of it everywhere.*"
- ▶ **Gauss**: "*I protest above all the use of an infinite quantity as a completed one, which in mathematics is never allowed.*"
- ▶ **Frege**: "*For the infinite will eventually refuse to be excluded from arithmetics . . . Thus we can foresee that this issue will provide for a momentous and decisive battle.*"
- ▶ **Poincaré**: "*grave disease infecting mathematics*".
- ▶ **Kronecker** despre Cantor: "*scientific charlatan*", "*corrupter of youth*"
- ▶ **Wittgenstein**: "*utter nonsense*"
- ▶ **Mittag-Leffler** despre lucrările lui Cantor: "*about one hundred years too soon.*"

8

Scrisoarea lui **Bertrand Russell** către **Frege** (16 iunie, 1902):

*"I find myself in agreement with you in all essentials . . . I find in your work discussions, distinctions, and definitions that one seeks in vain in the work of other logicians . . . There is just one point where I have encountered a difficulty."*

Frege, apendix la **The Fundamental Laws of Arithmetic**, Vol. 2:

*"There is nothing worse that can happen to a scientist than to have the foundation collapse just as the work is finished. I have been placed in this position by a letter from Mr. Bertrand Russell."*

9

Conform teoriei naive a mulțimilor, orice colecție definibilă este mulțime. Fie  $U$  mulțimea tuturor mulțimilor.

### Paradoxul lui Russel (1902)

Fie  $R = \{A \in U \mid A \notin A\}$ . Atunci  $R$  este mulțime, deci  $R \in U$ . Obținem că  $R \notin R \iff R \in R$ .

### Criza fundamentelor matematicii

- ▶ Paradoxul lui Russel  $\Rightarrow$  Sistemul logic al lui Frege **inconsistent**
- ▶ a declanșat criza fundamentelor matematicii ("foundations of mathematics")
- ▶ s-a dezvoltat teoria axiomatică a mulțimilor: **Zermelo-Fraenkel (ZF)**, **ZFC**: ZF+ Axioma alegerii (*Axiom of Choice*)

10



- ▶ unul dintre matematicienii de vârf ai generației sale
- ▶ unul dintre fondatorii teoriei demonstrației și logicii matematice
- ▶ lista sa de 23 probleme deschise (1902) a influențat foarte mult matematica secolului XX

11

### Programul lui Hilbert (1921)

Să se formalizeze matematica și să se stabilească următoarele:

- ▶ Matematica este **consistentă**: un enunț matematic și negația sa nu pot fi demonstrate simultan.
- ▶ Matematica este **completă**: toate enunțurile matematice adevărate pot fi demonstrate.
- ▶ Matematica este **decidabilă**: există o regulă mecanică pentru a determina dacă un enunț matematic dat este adevărat sau fals

12

## Programul lui Hilbert

Hilbert a fost convins că aceste obiective pot fi atinse:

*"Every mathematical problem must necessarily be susceptible to an exact statement either in the form of an actual answer to the question asked, or by the proof of the impossibility of its solution".*

*"Once a logical formalism is established one can expect that a systematic, so-to-say computational, treatment of logic formulas is possible, which would somewhat correspond to the theory of equations in algebra."*

13

## Kurt Gödel (1906-1978)

### Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel (1931-33)

- ▶ **Incompletitudinea** aritmeticii obișnuite.
- ▶ **Imposibilitatea** de a demonstra consistența teoriei mulțimilor.
- ▶ Au marcat eșecul programului lui Hilbert.



- ▶ Este considerat cel mai mare logician al secolului XX.
- ▶ A introdus funcțiile calculabile.
- ▶ A demonstrat teorema de completitudine a logicii de ordinul I.
- ▶ A demonstrat că Axioma Alegerii și Ipoteza Continuumului sunt consistente cu axiomele teoriei mulțimilor.

14

## Kurt Gödel (1906-1978)

### John von Neumann:

*"Kurt Gödel's achievement in modern logic is singular and monumental - indeed it is more than a monument, it is a landmark which will remain visible far in space and time .... The subject of logic has certainly completely changed its nature and possibilities with Gödel's achievement."*

### Revista TIME (19 martie 1999)

Gödel a fost inclus in lista cu cei mai importanți 20 oameni de știință și gânditori ai secolului XX.

15

## Problema de decizie (Entscheidungsproblem)

- ▶ **Hilbert și Ackermann (1928)**: Există un algoritm pentru a verifica dacă o anumită formulă din logica de ordinul întâi este adevărată?
- ▶ Cu alte cuvinte: Este logica de ordinul întâi **decidabilă**?

16

Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc. 42 (1936).

- ▶ a demonstrat că logica de ordinul întâi este **nedecidabilă** (rezultat obținut independent de Church (1936)).
- ▶ a introdus mașina Turing (universală) pentru a formaliza noțiunea de algoritm.



- ▶ părintele informaticii și inteligenței artificiale
- ▶ mașina Turing universală este model al calculatoarelor actuale

### Revista TIME (19 martie 1999)

Turing a fost inclus în lista cu cei mai importanți 20 oameni de știință și gânditori ai secolului XX:

*"Virtually all computers today from 10 million supercomputers to the tiny chips that power cell phones and Furbies, have one thing in common: they are all "von Neumann machines", variations on the basic computer architecture that John von Neumann, building on the work of Alan Turing, laid out in the 1940's."*

### Premiul Turing

- ▶ <http://amturing.acm.org/>
- ▶ decernat anual de către Association for Computing Machinery (ACM) pentru contribuții în informatică
- ▶ este considerat un Premiu Nobel pentru Informatică