FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 1

(S1.1) Fie X o mulţime. Să se arate că nu există o funcţie surjectivă cu domeniul X şi codomeniul $\mathcal{P}(X)$.
Demonstraţie: Presupunem că ar exista şi fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulţimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicţie. □

(S1.2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ şi $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relaţie binară pe A. Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R?
Demonstraţie: Obţinem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

□

(S1.3) Să se demonstreze asociativitatea compunerii relaţiilor.
Demonstraţie: Fie $R \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, $S \subseteq C \times D$ trei relaţii. Vrem să demonstrăm că

$$(R \circ Q) \circ S = R \circ (Q \circ S).$$

$\subseteq$ Fie $(a, d) \in (R \circ Q) \circ S$. Atunci există $c \in C$ cu $(a, c) \in R \circ Q$ şi $(c, d) \in S$. Din faptul că $(a, c) \in R \circ Q$ avem că există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in Q$. Din faptul că $(b, c) \in Q$ şi $(c, d) \in S$, avem $(b, d) \in Q \circ S$. Am obţinut că $(a, b) \in R$ şi $(b, d) \in Q \circ S$. Prin urmare, $(a, d) \in R \circ (Q \circ S)$.
$\supseteq$ Se demonstrează analog. □

(S1.4) Fie A, B, C mulţimi. Demonstraţi că

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demonstraţie:

(i) Avem că

$$\begin{aligned}
x \in A \times (B \cup C) &\iff \text{există } a \in A \text{ şi } y \in B \cup C \text{ cu } x = (a, y)\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ şi } y \in B \text{ sau } y \in C \text{ cu } x = (a, y)\\
&\iff \big(\text{există } a \in A \text{ şi } y \in B \text{ cu } x = (a, y)\big)\\
&\qquad \text{sau } \big(\text{există } a \in A \text{ şi } y \in C \text{ cu } x = (a, y)\big)\\
&\iff x \in A \times B \text{ sau } x \in A \times C\\
&\iff x \in (A \times B) \cup (A \times C).
\end{aligned}$$

Prin urmare, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) Demonstrăm prin dublă incluziune.

$\subseteq$ Fie $x \in A \times (B \cap C)$. Atunci există $a \in A$ şi $y \in B \cap C$ cu $x = (a, y)$. Deoarece $y \in B$, rezultă că $x \in A \times B$. Deoarece $y \in C$, rezultă că $x \in A \times C$. Prin urmare, $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

$\supseteq$ Fie $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Atunci $x \in A \times B$ şi $x \in A \times C$, aşadar, $x = (a_1, y_1)$ cu $a_1 \in A, y_1 \in B$ şi $x = (a_2, y_2)$ cu $a_2 \in A, y_2 \in B$. Deoarece $x = (a_1, y_1) = (a_2, y_2)$, trebuie să avem $a_1 = a_2$ şi $y_1 = y_2$. Fie $a := y_1 = y_2$ şi $y := y_1 = y_2$. Atunci $x = (a, y)$, cu $a \in A$ şi $y \in B \cap C$. Rezultă că $x \in A \times (B \cap C)$.

Am demonstrat că $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. $\square$