FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 2

(S2.1) Demonstraţi următoarele:

(i) Pentru orice mulţimi A, B, dacă $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$.

(ii) Pentru orice cardinal finit α, avem că $\alpha < \aleph_0$.

(iii) Pentru orice mulţime A şi orice cardinal α, dacă $\alpha \leq |A|$, atunci există o submulţime B a lui A a.î. $|B| = \alpha$.

(iv) $\mathbf{0} \leq \alpha$ pentru orice cardinal α.

(v) $\mathbf{1} \leq \alpha$ pentru orice cardinal $\alpha \neq \mathbf{0}$.

(vi) Relaţia $\leq$ este reflexivă şi tranzitivă.

Demonstraţie:

(i) Fie A, B a.î. $A \subseteq B$. Dacă $A = \emptyset$, atunci $Fun(\emptyset, B)$ are un singur element, funcţia vidă, care este injectivă. Presupunem că A este nevidă. Atunci funcţia incluziune $\iota_A : A \to B$, $\iota_A(a) = a$ este injectivă. Prin urmare, $|A| \leq |B|$.

(ii) Avem că $\alpha = |A|$, unde $A = \emptyset$ sau $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $A \subseteq \mathbb{N}$, aplicăm (i) pentru a obţine că $\alpha \leq \aleph_0$. Rămâne să arătăm că $\alpha \neq \aleph_0$. Demonstrăm că o funcţie $h : A \to \mathbb{N}$ nu poate fi surjectivă. Deoarece $h(A)$ este o submulţime finită a lui $\mathbb{N}$, există $M := \max h(A)$. Atunci $M + 1 \notin h(A)$.

(iii) Fie $\alpha = |C|$. Deoarece $\alpha \leq |A|$, există o funcţie injectivă $f : C \to A$. Luăm $B := f(C)$. Atunci $B \subseteq A$ şi $|B| = |C| = \alpha$.

(iv) Fie $\alpha = |A|$. Deoarece $\emptyset \subseteq A$, rezultă din (i) că $\mathbf{0} = |\emptyset| \leq |A| = \alpha$.

(v) Fie $\alpha = |A|$. Deoarece $\alpha \neq \mathbf{0}$, rezultă că $A \neq \emptyset$, deci există $a \in A$. Atunci $\{a\} \subseteq A$ şi, conform (i), $\mathbf{1} = |\{a\}| \leq |A| = \alpha$.

(vi) Fie $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ şi $\gamma = |C|$ cardinale.
Deoarece $1_A : A \to A$ este bijecţie, rezultă că $\alpha \leq \alpha$. Prin urmare, $\leq$ este reflexivă.
Presupunem că $\alpha \leq \beta$ şi $\beta \leq \gamma$. Atunci există funcţiile injective $f : A \to B$ şi $g : B \to C$. Rezultă că $h := g \circ f : A \to C$ este injectivă, deci $\alpha \leq \gamma$. Aşadar, $\leq$ este tranzitivă. $\square$

(S2.2) Fie A, B mulţimi arbitrare. Definim
$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A \text{ şi } f : X \to B \text{ este funcţie injectivă}\}$$
şi relaţia $\le$ pe $\mathcal{F}$ astfel:
$$(X_1, f_1) \le (X_2, f_2) \Longleftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \text{ şi } f_2|_{X_1} = f_1.$$
Demonstraţi că $(\mathcal{F}, \le)$ este inductiv ordonată.
Demonstraţie: Evident, $\mathcal{F}$ este nevidă (putem alege $X = \emptyset$ şi f funcţia vidă). Se observă uşor că $(\mathcal{F}, \le)$ este o mulţime parţial ordonată.

Fie $\mathcal{G} = \{(X_i, f_i) \mid i \in I\}$ o submulţime total ordonată a lui $\mathcal{F}$. Fie $X := \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq A$.
Definim $f : X \to B$ astfel:
$$\text{dacă } x \in X, \text{ alegem un } i \in I \ \text{ a.î. } x \in X_i \text{ şi definim } f(x) = f_i(x).$$
Demonstrăm mai întâi că definiţia lui f este corectă. Fie $i, j \in I, i \neq j$ a.î. $x \in X_i \cap X_j$. Trebuie să arătăm că $f_i(x) = f_j(x)$. Deoarece $\mathcal{G}$ este total ordonată, avem $(X_i, f_i) \le (X_j, f_j)$ sau $(X_j, f_j) \le (X_i, f_i)$. În primul caz, rezultă că $X_i \subseteq X_j$ şi $f_i = f_j|_{X_i}$, deci $f_j(x) = f_i(x)$. Cel de-al doilea caz se tratează similar.
De asemenea, se observă uşor că $(X_i, f_i) \le (X, f)$ pentru orice $i \in I$.
Demonstrăm în continuare că f este injectivă. Fie $x, y \in X$ cu $f(x) = f(y)$. Atunci există $i, j \in I$ a.î. $x \in X_i$ şi $y \in X_j$. Rezultă că $f(x) = f_i(x)$ şi $f(y) = f_j(y)$, deci $f_i(x) = f_j(y)$.
Deoarece $\mathcal{G}$ este total ordonată, avem următoarele două posibilităţi:

(i) $(X_i, f_i) \le (X_j, f_j)$. Atunci $x \in X_i \subseteq X_j$ şi $f_i = f_j|_{X_i}$, deci $f_j(x) = f_i(x)$. Obţinem că $f_j(x) = f_j(y)$. Deoarece f_j este injectivă, rezultă că $x = y$.

(ii) $(X_j, f_j) \le (X_i, f_i)$. Se demonstrează similar că $x = y$.

Aşadar, $(X, f) \in \mathcal{F}$ este un majorant al lui $\mathcal{G}$. Prin urmare, $(\mathcal{F}, \le)$ este inductiv ordonată. $\square$

(S2.3) Demonstraţi că pentru orice numere reale $a < b$, $c < d$, $|(a, b)| = |(c, d)|$.
Demonstraţie: Definim
$$f : (a, b) \to (c, d), \quad f(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c \text{ pentru orice } x \in (a, b).$$
Definiţia lui f este corectă: dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ şi $0 < \frac{d-c}{b-a}(x - a) < d - c$, deci $c < f(x) < d$. Definim
$$g : (c, d) \to (a, b), \quad g(y) = \frac{b - a}{d - c}(y - c) + a \text{ pentru orice } y \in (c, d).$$
Se observă uşor că f şi g sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, f este bijectivă, deci $|(a, b)| = |(c, d)|$. $\square$

(S2.4) Demonstraţi că pentru orice numere reale $a < b$, $|(a, b)| = \mathfrak{c}$.
Demonstraţie: Ştim că funcţia $\text{tg} : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este bijectivă. Prin urmare, $\mathfrak{c} = \left|\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right|$. Aplicăm acum (S2.3) pentru a obţine că $|(a, b)| = \left|\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right| = \mathfrak{c}$. $\square$