FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 3

(S3.1) Demonstraţi că dacă α şi β sunt cardinale cu α infinit şi $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha + \beta = \alpha$.
Demonstraţie: Obţinem

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & \alpha + \mathbf{0} & \text{din Propoziţia 2.20.(i)} \\ & \leq & \alpha + \beta & \text{din Propoziţia 2.20.(iii), deoarece, conform Propoziţiei 2.8.(iv), } \mathbf{0} \leq \beta \\ & \leq & \alpha + \alpha & \text{din Propoziţia 2.20.(iii), deoarece, din ipoteză, } \beta \leq \alpha \\ & = & \alpha & \text{din Propoziţia 2.21, deoarece, din ipoteză, } \alpha \text{ este infinit.} \end{array}$$ □

(S3.2) Demonstraţi următoarele proprietăţi ale produsului cardinalelor.

(i) $\mathbf{0} \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ pentru orice cardinal α.

(ii) $\mathbf{1}$ este element neutru al lui $\cdot$.

(iii) Pentru orice cardinale α, β, γ,

$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma.$$

(iv) Pentru orice cardinale α, β a.î. $\beta \neq \mathbf{0}$, $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$.

(v) Operaţia $\cdot$ este comutativă, asociativă şi distributivă faţă de $+$.

Demonstraţie: Fie $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ şi $\gamma = |C|$.

(i) Avem că $\mathbf{0} \cdot \alpha = |\emptyset \times A| = |\emptyset| = \mathbf{0}$ şi $\alpha \cdot \mathbf{0} = |A \times \emptyset| = |\emptyset| = \mathbf{0}$.

(ii) Deoarece, conform (i), $\mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$, putem prespune că $\alpha \neq \mathbf{0}$, deci că A este nevidă. Atunci funcţiile

$$f : A \to A \times \{0\},\ f(a) = (a, 0) \text{ şi } g : A \to \{0\} \times A,\ g(a) = (0, a)$$

sunt bijecţii, deci $A \sim A \times \{0\} \sim \{0\} \times A$. Obţinem

$$\alpha \cdot \mathbf{1} = |A \times \{0\}| = |A| = \alpha \text{ şi } \mathbf{1} \cdot \alpha = |\{0\} \times A| = |A| = \alpha.$$

(iii) Dacă $\alpha = \mathbf{0}$ sau $\beta = \mathbf{0}$, atunci $\alpha \cdot \beta \overset{(i)}{=} \mathbf{0} \leq \alpha \cdot \gamma$. Dacă $\gamma = \mathbf{0}$, atunci trebuie să avem $\beta = \mathbf{0}$, deci, din (i), $\alpha \cdot \beta = \mathbf{0} = \alpha \cdot \gamma$. Presupunem că α, β, γ sunt nenuli, deci că mulţimile A, B, C sunt nevide. Deoarece $\beta \leq \gamma$, există o funcţie injectivă $f : B \to C$. Definim

$$g : A \times B \to A \times C, \quad g(a,b) = (a, f(b)).$$

Se observă uşor că g este injectivă. Prin urmare,

$$\alpha \cdot \beta = |A \times B| \leq |A \times C| = \alpha \cdot \gamma.$$

(iv) Deoarece $\beta \neq \mathbf{0}$, avem, conform Propoziţiei 2.8.(v), că $\mathbf{1} \leq \beta$. Obţinem

$$\alpha \overset{(ii)}{=} \alpha \cdot \mathbf{1} \overset{(iii)}{\leq} \alpha \cdot \beta.$$

(v) Dacă A sau B este vidă, atunci $\alpha = \mathbf{0}$ sau $\beta = \mathbf{0}$, deci $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = \mathbf{0}$. Presupunem că A şi B sunt nevide. Definim $f : A \times B \to B \times A$, $f(a,b) = (b,a)$. Atunci f este bijecţie, prin urmare

$$\alpha \cdot \beta = |A \times B| = |B \times A| = \beta \cdot \alpha.$$

Avem că

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = |A \times B| \cdot \gamma = |(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)| = \alpha \cdot |B \times C| = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

Presupunem că B şi C sunt disjuncte. Obţinem că

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot |B \cup C| = |A \times (B \cup C)| = |(A \times B) \cup (A \times C)| = |A \times B| + |A \times C| \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \quad \square \end{aligned}$$

(S3.3) Fie A o mulţime infinită. Demonstraţi că $\left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n\right| = |A|$.
Demonstraţie: Deoarece $A = A^1 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$, avem că

$$|A| \leq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n \right|.$$

Conform Propoziţiei 2.28, avem că $|A^n| = |A|^n = |A|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n\right| &\leq |A| \cdot |\mathbb{N}^*| && \text{din Propoziţia 2.38} \\ &= |A| \cdot \aleph_0 && \text{din Propoziţia 2.16} \\ &= \max\{|A|, \aleph_0\} && \text{din Propoziţia 2.29} \\ &= |A| && \text{din Propoziţia 2.14.} \end{aligned}$$

Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a obţine că $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n| = |A|$. $\square$

(S3.4) Fie α, β, γ cardinale arbitrare. Demonstraţi următoarele:

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$, $\quad (\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma \quad$ şi $\quad (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

(ii) Dacă $\alpha \leq \beta$, atunci $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

Demonstraţie:

(i) Fie $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ şi $\gamma = |C|$ cu $B \cap C = \emptyset$. Aplicăm Lema 2.34 pentru a obţine

$$\begin{aligned}
\alpha^{\beta+\gamma} &= |Fun(B \cup C, A)| = |Fun(B, A) \times Fun(C, A)| \\
&= |Fun(B, A)| \cdot |Fun(C, A)| = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma, \\
(\alpha \cdot \beta)^\gamma &= |Fun(C, A \times B)| = |Fun(C, A) \times Fun(C, B)| \\
&= |Fun(C, A)| \cdot |Fun(C, B)| = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma, \\
(\alpha^\beta)^\gamma &= |Fun(C, Fun(B, A))| = |Fun(C \times B, A)| = \alpha^{|C\times B|} = \alpha^{\gamma\cdot\beta} = \alpha^{\beta\cdot\gamma} \\
&\quad \text{deoarece } \cdot \text{ este comutativă.}
\end{aligned}$$

(ii) Deoarece $\alpha \leq \beta$, există o injecţie $f : A \to B$. Definim funcţia

$$\Phi : Fun(C, A) \to Fun(C, B), \quad \Phi(h) = f \circ h.$$

Demonstrăm că Φ este injectivă. Fie $h_1, h_2 : C \to A$. Atunci $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$ $\iff f(h_1(c)) = f(h_2(c))$ pentru orice $c \in C$ $\iff h_1(c) = h_2(c)$ pentru orice $c \in C$ (deoarece f este injectivă) $\iff h_1 = h_2$.
Rezultă că $\alpha^\gamma = |Fun(C, A)| \leq |Fun(C, B)| = \beta^\gamma$. □

(S3.5) Fie α, β cardinale astfel încât cel puţin unul dintre ele este infinit. Demonstraţi că $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.
Demonstraţie: Presupunem fără a restrânge generalitatea că α este infinit. Deoarece $\leq$ este totală, avem următoarele două cazuri:

(i) $\beta \leq \alpha$. Atunci $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ şi $\alpha + \beta = \alpha$, conform Propoziţiei 2.22.

(ii) $\alpha \leq \beta$. Atunci β este, de asemenea, infinit, $\max\{\alpha, \beta\} = \beta$ şi $\alpha + \beta = \beta + \alpha = \beta$, conform Propoziţiei 2.22. □