FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 3

(S3.1) Demonstraţi că dacă α şi β sunt cardinale cu α infinit şi $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha + \beta = \alpha$.

(S3.2) Demonstraţi următoarele proprietăţi ale produsului cardinalelor.

(i) $\mathbf{0} \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ pentru orice cardinal α.

(ii) $\mathbf{1}$ este element neutru al lui $\cdot$.

(iii) Pentru orice cardinale α, β, γ,

$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma.$$

(iv) Pentru orice cardinale α, β a.î. $\beta \neq \mathbf{0}$, $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$.

(v) Operaţia $\cdot$ este comutativă, asociativă şi distributivă faţă de $+$.

(S3.3) Fie A o mulţime infinită. Demonstraţi că $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A^n\right| = |A|$.

(S3.4) Fie α, β, γ cardinale arbitrare. Demonstraţi următoarele:

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$, $\quad (\alpha\cdot\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$ $\quad$ şi $\quad (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

(ii) Dacă $\alpha \leq \beta$, atunci $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

(S3.5) Fie α, β cardinale astfel încât cel puţin unul dintre ele este infinit. Demonstraţi că $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.