FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 4

(S4.1) Fie LP logica propoziţională. Să se arate următoarele:

(i) Mulţimea $Expr$ a expresiilor lui LP este numărabilă.

(ii) Mulţimea $Form$ a formulelor lui LP este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, că $|Sim| = |V| + |\{\neg, \rightarrow, (,)\}| = \aleph_0 + 4 = \aleph_0$. Deci Sim este numărabilă. Conform Propoziţiei 2.42.(i), rezultă că Sim^n este numărabilă pentru orice $n \geq 1$. Aplicând Propoziţia 2.42.(iii) rezultă că $Expr$ este cel mult numărabilă. Deoarece $Sim \subseteq Expr$ şi Sim este numărabilă, rezultă că $Expr$ este, de asemenea, numărabilă.

(ii) Avem că $V \subseteq Form \subseteq Expr$. Prin urmare, $\aleph_0 = |V| \leq |Form|$ şi $|Form| \leq |Expr| = \aleph_0$. Aplicând Teorema Cantor-Schröder-Bernstein, obţinem că $|Form| = \aleph_0$. Prin urmare, $Form$ este numărabilă.

(S4.2) Să se arate că pentru orice formulă φ, numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ.

Demonstraţie: Pentru orice formulă φ notăm cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise şi cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în φ.
Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă } l(\varphi) = r(\varphi).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule (Propoziţia 3.6). Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci $l(\varphi) = l(v) = 0 = r(v) = r(\varphi)$.
- $\varphi = (\neg\psi)$ şi ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Obţinem $l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi)$.
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ şi ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Obţinem $l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi)$.

(S4.3) Să se dea o definiţie recursivă a mulţimii variabilelor unei formule.

Demonstraţie: Se observă că $Var : Form \to \mathcal{P}(V)$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lll} (R0) & Var(v) & = \{v\} \\ (R1) & Var(\neg\varphi) & = Var(\varphi) \\ (R2) & Var(\varphi \to \psi) & = Var(\varphi) \cup Var(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = \mathcal{P}(V)$ şi pentru

$$\begin{array}{rc} G_0 : V \to A, & G_0(v) = \{v\}, \\ G_\neg : A \to A, & G_\neg(\Gamma) = \Gamma, \\ G_\to : A \times A \to A, & G_\to(\Gamma, \Delta) = \Gamma \cup \Delta. \end{array}$$

pentru a concluziona că Var este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2).

(S4.4) Să se arate că pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ şi pentru orice formule φ, ψ avem:

(i) $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$;

(ii) $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$.

Demonstraţie:

(i) Avem că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\neg\varphi \to \psi) = e^+(\neg\varphi) \to e^+(\psi) = \neg e^+(\varphi) \to e^+(\psi) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \vee e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$ avem $\neg x \to y = x \vee y$:

x	y	$\neg x$	$\neg x \to y$	$x \vee y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii) Avem că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\neg(\varphi \to \neg\psi)) = \neg e^+(\varphi \to \neg\psi) = \neg(e^+(\varphi) \to e^+(\neg\psi)) \\ &= \neg(e^+(\varphi) \to \neg e^+(\psi)) \\ &\overset{(**)}{=} e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (**), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$ avem $\neg(x \to \neg y) = x \wedge y$:

x	y	$\neg y$	$x \to \neg y$	$\neg(x \to \neg y)$	$x \wedge y$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

(S4.5) Demonstraţi că, pentru orice formule φ, ψ, avem:

(i) $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\vDash \psi \to \varphi$ ddacă $e^+(\psi) \leq e^+(\varphi)$ pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$.

(ii) $\varphi \sim \psi$ ddacă $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$ pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$.

Demonstraţie:

(i) Avem că

$$\begin{aligned} \psi \vDash \varphi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e \vDash \psi \text{ implică } e \vDash \varphi \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{dacă } e^+(\psi) = 1,\ \text{atunci } e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\psi) \leq e^+(\varphi) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \vDash \psi \to \varphi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\psi) \leq e^+(\varphi) \end{aligned}$$

(ii) Avem că

$$\begin{aligned} \varphi \sim \psi &\iff Mod(\varphi) = Mod(\psi) \iff Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi) \text{ şi } Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi) \\ &\iff \varphi \vDash \psi \text{ şi } \psi \vDash \varphi \\ &\overset{\text{(i)}}{\iff} \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) \leq e^+(\psi) \text{ şi } e^+(\psi) \leq e^+(\varphi) \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = e^+(\psi) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \vDash \varphi \leftrightarrow \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\leftrightarrow} e^+(\psi) = 1 \quad \text{din Prop. 3.12} \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = e^+(\psi). \end{aligned}$$

(S4.6) Arătaţi că pentru orice formule φ, ψ, χ, avem:

(i) $\psi \vDash \varphi \to \psi$;

(ii) $(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$;

(iii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \land \psi) \to \chi$;

(iv) $\varphi \lor (\varphi \land \psi) \sim \varphi$;

(v) $\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$;

(vi) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0,1\}$,

$$\begin{array}{llll} 1 \to a = a, & a \to 1 = 1, & 0 \to a = 1, & a \to 0 = \neg a, \\ 1 \wedge a = a, & 0 \wedge a = 0, & 1 \vee a = 1, & 0 \vee a = a \end{array}$$

şi $a \to b = 1 \iff a \leq b$.

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e \vDash \psi$, deci $e^+(\psi) = 1$. Avem că

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1 = 1.$$

Prin urmare, $e \vDash \varphi \to \psi$.

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e \vDash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)$, deci $e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = 1$. Avem că

$$1 = e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = 1$ şi $e^+(\psi) \to e^+(\chi) = 1$. Prin urmare, $e^+(\varphi) \leq e^+(\psi)$ şi $e^+(\psi) \leq e^+(\chi)$. Obţinem atunci, din tranzitivitatea lui $\leq$, că $e^+(\varphi) \leq e^+(\chi)$. Rezultă că

$$e^+(\varphi \to \chi) = e^+(\varphi) \to e^+(\chi) = 1.$$

Prin urmare, $e \vDash \varphi \to \chi$.

(iii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Conform (S4.5).(ii), trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi),$$

deci că

$$e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi).$$

Metoda 1: Ne folosim de următoarele tabele:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi) \to e^+(\chi)$	$e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi))$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$	$e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 0 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = 0 \to e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\psi) \to e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Conform (S4.5).(ii), trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1 = e^+(\varphi).$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0 = e^+(\varphi).$$

(v) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Conform (S4.5).(ii), trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = e^+((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}(e^+(\varphi) \land e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (0 \land e^+(\psi)) \to e^+(\chi) \\ &= 0 \to e^+(\chi) = 1, \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \lor (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (0 \to e^+(\chi)) \lor (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) \\ &= 1 \lor (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1.\end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Avem următoarele subcazuri:

(b1) $e^+(\psi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}(e^+(\varphi) \land e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (1 \land 0) \to e^+(\chi) \\ &= 0 \to e^+(\chi) = 1, \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \lor (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \lor (0 \to e^+(\chi)) \\ &= e^+(\chi) \lor 1 = 1.\end{aligned}$$

(b2) $e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned}(e^+(\varphi) \land e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (1 \land 1) \to e^+(\chi) = 1 \to e^+(\chi) \\ &= e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \lor (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \lor (1 \to e^+(\chi)) \\ &= e^+(\chi) \lor e^+(\chi) = e^+(\chi).\end{aligned}$$

(vi) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) \\ &= 1.\end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 1 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1.\end{aligned}$$