FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 5

(S5.1) Arătaţi că pentru orice formule φ, ψ, χ, avem:

(i) $\psi \models \varphi \to \psi$;

(ii) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \models \varphi \to \chi$;

(iii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$;

(iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(v) $\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$;

(vi) $\models \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0, 1\}$,

$$\begin{array}{llll} 1 \to a = a, & a \to 1 = 1, & 0 \to a = 1, & a \to 0 = \neg a, \\ 1 \wedge a = a, & 0 \wedge a = 0, & 1 \vee a = 1, & 0 \vee a = a \end{array}$$

şi $a \to b = 1 \iff a \leq b$.

(i) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e \models \psi$, deci $e^+(\psi) = 1$. Avem că

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1 = 1.$$

Prin urmare, $e \models \varphi \to \psi$.

(ii) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e \models (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)$, deci $e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = 1$. Avem că

$$1 = e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = 1$ şi $e^+(\psi) \to e^+(\chi) = 1$. Prin urmare, $e^+(\varphi) \leq e^+(\psi)$ şi $e^+(\psi) \leq e^+(\chi)$. Obţinem atunci, din tranzitivitatea lui $\leq$, că $e^+(\varphi) \leq e^+(\chi)$. Rezultă că

$$e^+(\varphi \to \chi) = e^+(\varphi) \to e^+(\chi) = 1.$$

Prin urmare, $e \models \varphi \to \chi$.

(iii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Conform (S4.5).(ii), trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \land \psi \to \chi),$$

deci că

$$e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi).$$

Metoda 1: Ne folosim de următoarele tabele:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)$	$e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi))$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$	$e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 0 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 1 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Conform (S4.5).(ii), trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1 = e^+(\varphi).$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0 = e^+(\varphi).$$

(v) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Conform (S4.5).(ii), trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = e^+((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (0 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) \\
&= 0 \to e^+(\chi) = 1, \\
(e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (0 \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) \\
&= 1 \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1.
\end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Avem următoarele subcazuri:

(b1) $e^+(\psi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (1 \wedge 0) \to e^+(\chi) \\
&= 0 \to e^+(\chi) = 1, \\
(e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \vee (0 \to e^+(\chi)) \\
&= e^+(\chi) \vee 1 = 1.
\end{aligned}$$

(b2) $e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned}
(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (1 \wedge 1) \to e^+(\chi) = 1 \to e^+(\chi) \\
&= e^+(\chi), \\
(e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \vee (1 \to e^+(\chi)) \\
&= e^+(\chi) \vee e^+(\chi) = e^+(\chi).
\end{aligned}$$

(vi) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))) = \neg\, e^+(\varphi) \to (\neg\, e^+(\psi) \Leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg\, e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned} \neg\, e^+(\varphi) \to (\neg\, e^+(\psi) \Leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg\, e^+(\psi) \Leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg\, e^+(\varphi) = 1$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned} \neg\, e^+(\varphi) \to (\neg\, e^+(\psi) \Leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 1 \to (\neg\, e^+(\psi) \Leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= \neg\, e^+(\psi) \Leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0) \\ &= \neg\, e^+(\psi) \Leftrightarrow \neg\, e^+(\psi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(S5.2) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ şi $\models \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned} \models \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi} \\ & \text{ pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1 \\ &\iff \models \varphi \text{ şi } \models \psi. \end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$, $e_1(x) = 1$ pentru orice $x \in V$, şi $e_2 : V \to \{0,1\}$, $e_2(x) = 0$ pentru orice $x \in V$, avem că $e_1 \not\models \neg v_0$ şi $e_2 \not\models v_0$, deci v_0 şi $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

(S5.3) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ şi $\Gamma \models \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \models \varphi$ şi $\Gamma \models \psi$.

Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui ψ. Cum $\Gamma \models \varphi$ şi $\Gamma \models \varphi \to \psi$, avem $e \models \varphi$ şi $e \models \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = 1 \to e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \models \psi$.

(ii) "$\rightarrow$" Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \rightarrow \psi$. Avem două cazuri:

   (a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 0 \boldsymbol{\rightarrow} e^+(\psi) = 1$, deci $e \models \varphi \rightarrow \psi$.

   (b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \models \varphi$. Atunci $e \models \Gamma \cup \{\varphi\}$, aşadar $e \models \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \boldsymbol{\rightarrow} 1 = 1$, deci $e \models \varphi \rightarrow \psi$.

   "$\Leftarrow$" Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \models \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \models \psi$.

(iii) Avem

$$
\begin{aligned}
\Gamma \models \varphi \wedge \psi \quad & \iff \quad \text{pentru orice model } e \text{ al lui } \Gamma,\ e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
& \iff \quad \text{pentru orice model } e \text{ al lui } \Gamma,\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) = 1 \\
& \iff \quad \text{pentru orice model } e \text{ al lui } \Gamma,\ e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \\
& \iff \quad \text{pentru orice model } e \text{ al lui } \Gamma,\ e \models \varphi \text{ şi } e \models \psi \\
& \iff \quad \Gamma \models \varphi \text{ şi } \Gamma \models \psi.
\end{aligned}
$$

(S5.4) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule σ, χ,

$$\Gamma \cup \{\neg\chi\} \vdash \neg(\sigma \rightarrow \sigma) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \chi.$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\chi\}$	$\vdash \neg(\sigma \rightarrow \sigma)$	Ipoteză
(2)	Γ	$\vdash \neg\chi \rightarrow \neg(\sigma \rightarrow \sigma)$	Teorema deducţiei
(3)	Γ	$\vdash (\neg\chi \rightarrow \neg(\sigma \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \chi)$	(A3) şi Propoziţia 3.27.(i)
(4)	Γ	$\vdash (\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \chi$	(MP): (2), (3)
(5)	Γ	$\vdash \sigma \rightarrow \sigma$	Propoziţiile 3.34 şi 3.28.(ii)
(6)	Γ	$\vdash \chi$	(MP): (4), (5).

(S5.5) Să se arate că pentru orice formule σ, χ,

(i) $\{\chi, \neg\chi\} \vdash \sigma$;

(ii) $\vdash \neg\chi \rightarrow (\chi \rightarrow \sigma)$;

(iii) $\vdash \neg\neg\sigma \rightarrow \sigma$;

(iv) $\vdash \sigma \rightarrow \neg\neg\sigma$.

Demonstraţie: Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\chi \rightarrow (\neg\sigma \rightarrow \neg\chi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\chi\}$	$\vdash \neg\sigma \rightarrow \neg\chi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\chi\}$	$\vdash (\neg\sigma \rightarrow \neg\chi) \rightarrow (\chi \rightarrow \sigma)$	(A3) şi Propoziţia 3.27.(i)
(4)	$\{\neg\chi\}$	$\vdash \chi \rightarrow \sigma$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\chi, \neg\chi\}$	$\vdash \sigma$	Teorema deducţiei.

Punctul (ii) se obţine din (i) aplicând de două ori Teorema deducţiei:

(1)	$\{\chi, \neg\chi\}$	$\vdash \sigma$	(i)
(2)	$\{\neg\chi\}$	$\vdash \chi \to \sigma$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\chi \to (\chi \to \sigma)$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (iii):

(1)	$\{\neg\sigma, \neg\neg\sigma\}$	$\vdash \neg(\sigma \to \sigma)$	(i)
(2)	$\{\neg\neg\sigma\}$	$\vdash \sigma$	(1) şi Propoziţia 3.39 (S5.4)
(3)		$\vdash \neg\neg\sigma \to \sigma$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (iv):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\sigma \to \neg\sigma$	(iii)
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\sigma \to \neg\sigma) \to (\sigma \to \neg\neg\sigma)$	(A3)
(3)	$\vdash \sigma \to \neg\neg\sigma$	(MP): (1), (2).