

Seminar 5

(S5.1) Arătați că pentru orice formule φ, ψ, χ , avem:

- (i) $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$;
- (ii) $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$;
- (iii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$;
- (iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;
- (v) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$;
- (vi) $\models \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$.

(S5.2) Confirmați sau infirmați:

- (i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$ și $\models \psi$;
- (ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

(S5.3) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

(S5.4) (Metoda reducerii la absurd)

Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule σ, χ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\chi\} \vdash \neg(\sigma \rightarrow \sigma) \Rightarrow \Gamma \vdash \chi.$$

(S5.5) Să se arate că pentru orice formule σ, χ ,

- (i) $\{\chi, \neg\chi\} \vdash \sigma$;
- (ii) $\vdash \neg\chi \rightarrow (\chi \rightarrow \sigma)$;
- (iii) $\vdash \neg\neg\sigma \rightarrow \sigma$;
- (iv) $\vdash \sigma \rightarrow \neg\neg\sigma$.