**FMI, Mate, Anul I**
**Logică matematică**

# Seminar 6

**(S6.1)** Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele interpretări $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.
**Demonstraţie:** Fie $e : V \to \mathbb{N}$. Avem

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) < e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) = e_{v_4 \leftarrow a}(v_4)\\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) \leq e_{v_4 \leftarrow a}(v_4)\\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e(v_3) \leq a\\
&\iff e(v_3) = 0.
\end{aligned}$$

**(S6.2)** Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I, orice formule $\varphi$, $\psi$ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabilă $x$, avem:

$$\neg\forall x\varphi \;\;\Dashv\vDash\;\; \exists x\neg\varphi \tag{1}$$

$$\forall x\varphi \;\;\vDash\;\; \forall x(\varphi \vee \psi) \tag{2}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \;\;\vDash\;\; \exists x\varphi \to \exists x\psi \tag{3}$$

**Demonstraţie:** Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.
Demonstrăm (1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\neg\forall x\varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \not\vDash (\forall x\varphi)[e]\\
&\iff \text{nu este adevărat că } \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]\\
&\iff \text{nu este adevărat că pentru orice } a \in A \text{ avem că } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\neg\varphi)[e_{x \leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\exists x\neg\varphi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]\\
&\implies \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x \leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \vee \psi))[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (3):
Avem că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$

(*) pentru orice $a \in A$, dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$, atunci $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}]$.

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi \to \exists x\psi)[e]$, adică

(**) dacă $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e]$, atunci $\mathcal{A} \models (\exists x\psi)[e]$.

Presupunem că $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e]$. Atunci există $b \in A$ cu $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow b}]$. Din (*) rezultă că $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow b}]$. Deci $\mathcal{A} \models (\exists x\psi)[e]$, ceea ce trebuia arătat.
**(S6.3)** Fie $x$, $y$ variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule $\varphi$, $\psi$ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\models \forall x\varphi \vee \forall x\psi$;

(ii) $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi \not\models \exists x(\varphi \wedge \psi)$;

(iii) $\forall x\exists y\varphi \not\models \exists y\forall x\varphi$.

**Demonstraţie:** Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \models (\forall x(\varphi \vee \psi))[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \models (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luăm $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \models (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \models \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luăm $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\models (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Avem:

(a) $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, ceea ce este adevărat (luăm $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \models (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$, ceea ce este adevărat (luăm $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \models (\exists x\psi)[e]$.
Prin urmare,

$$\mathcal{N} \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte, $\mathcal{N} \models (\exists x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow n}]$ $\iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$ şi $n \geq 2$, ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models (\exists x(\varphi \wedge \psi))[e].$$

(iii) Fie $\varphi := x \dot{<} y$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \mathcal{N} \models (\exists y \varphi)[e_{x\leftarrow n}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models \varphi[(e_{x\leftarrow n})_{y\leftarrow m}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat (se ia, de pildă, $m := n + 1$). Aşadar,

$$\mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models (\forall x \varphi)[e_{y\leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\qquad \text{avem } \mathcal{N} \models \varphi[(e_{x\leftarrow n})_{y\leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \not\models (\exists y \forall x \varphi)[e].$$