**FMI, Mate, Anul I**
**Logică matematică**

# Seminar 6

**(S6.1)** Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele interpretări $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

**(S6.2)** Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I, orice formule $\varphi$, $\psi$ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabilă $x$, avem:

$$\neg\forall x\varphi \quad \vDash\!\!\!\!\Dashv \quad \exists x\neg\varphi \tag{1}$$

$$\forall x\varphi \quad \vDash \quad \forall x(\varphi \vee \psi) \tag{2}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \quad \vDash \quad \exists x\varphi \to \exists x\psi \tag{3}$$

**(S6.3)** Fie $x$, $y$ variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule $\varphi$, $\psi$ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\vDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$;

(ii) $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi \not\vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$;

(iii) $\forall x\exists y\varphi \not\vDash \exists y\forall x\varphi$.