FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Seminar 7

(S7.1) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I, orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \;\; \vDash\!\!\!\Dashv \;\; \varphi \vee \exists x\psi \tag{1}$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \;\; \vDash\!\!\!\Dashv \;\; \varphi \to \forall x\psi \tag{2}$$
$$\exists x(\psi \to \varphi) \;\; \vDash\!\!\!\Dashv \;\; \forall x\psi \to \varphi \tag{3}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.
Demonstrăm (1):

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] & \iff & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& & \text{(aplicând Propoziţia 4.21)} \\
& \iff & \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff & \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e] \\
& \iff & \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x\psi)[e].
\end{array}$$

Demonstrăm (2):

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] & \iff & \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff & \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff & \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& & \text{(aplicând Propoziţia 4.21)} \\
& \iff & \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff & \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e] \\
& \iff & \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\psi)[e].
\end{array}$$

Demonstrăm (3):

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{A} \vDash (\exists x(\psi \to \varphi))[e] & \iff & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \\
& \iff & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\big) \\
& \iff & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e]\big) \\
& & \text{(aplicând Propoziţia 4.21)} \\
& \iff & (\text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
& \iff & \mathcal{A} \not\vDash (\forall x\psi)[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
& \iff & \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e].
\end{array}$$

Fixăm acum $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

(S7.2) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

(i) $\forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y, z) = d)$;

(ii) $\forall y(\forall x P(x, y) \to \exists z Q(x, z))$;

(iii) $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z))$;

(iv) $\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$.

Demonstraţie:

(i)

$$\begin{aligned} \forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y, z) = d) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \forall x(f(x) = c) \wedge \exists z\neg(g(y, z) = d) \\ &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \forall x \exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(y, z) = d)). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \forall y(\forall x P(x, y) \to \exists z Q(x, z)) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \forall y \exists z(\forall x P(x, y) \to Q(x, z)) \\ &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \forall y \exists z(\forall u P(u, y) \to Q(x, z)) \\ &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \forall y \exists z \exists u(P(u, y) \to Q(x, z)). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \exists x \forall y P(x, y) \vee \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z)) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \exists x(\forall y P(x, y) \vee \neg\exists y \forall z(S(y) \to R(z)) \\ &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \exists x(\forall y P(x, y) \vee \forall y \exists z\neg(S(y) \to R(z)) \\ &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \exists x(\forall u P(x, u) \vee \forall y \exists z\neg(S(y) \to R(z)) \\ &\ \mathrel{\text{⫤⊨}}\ \exists x \forall u \forall y \exists z(P(x, u) \vee \neg(S(y) \to R(z)). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}} \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \to (\neg\neg\exists x R(x) \vee \neg\forall x \exists z Q(z, x)) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}} \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \to (\exists x R(x) \vee \exists x \forall z\neg Q(z, x)) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}} \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \to \exists x(R(x) \vee \forall z\neg Q(z, x)) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}} \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \to \exists x \forall z(R(x) \vee \neg Q(z, x)) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}} \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \to \exists u \forall v(R(u) \vee \neg Q(v, u)) &\ \mathrel{\text{⫤⊨}} \\ \forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v, u))). & \end{aligned}$$

(S7.3) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

$$\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi);$$

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\models \varphi \rightarrow \forall x\varphi;$$

(iii) pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$,

$$\models \exists x(x = t).$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \rightarrow A$ o evaluare.

(i) Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi))[e]$. Pentru aceasta, presupunem că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e]$ – deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ (*) – şi vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \not\models (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x\leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, de unde avem că $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \forall x\varphi)[e]$. Pentru aceasta, presupunem că $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ şi vrem să arătăm $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e şi $e_{x\leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" x, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 4.21, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

(iii) Trebuie arătat, folosind Propoziţia 4.13.(iv), că există un $b \in A$ astfel încât $\mathcal{A} \models (x = t)[e_{x\leftarrow b}]$, i.e. că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b})$. Cum $x \notin Var(t)$, aplicând Propoziţia 4.20, avem $t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b}) = t^{\mathcal{A}}(e)$. Deci trebuie arătat doar că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e)$. Dar acest lucru e simplu, doar luăm $b := t^{\mathcal{A}}(e)$.