

Seminar 7

(S7.1) Să se arate că pentru orice limbaj \mathcal{L} de ordinul I, orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi \quad (1)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (2)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (3)$$

Fixăm acum \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- două simboluri de constante c, d .

(S7.2) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui \mathcal{L} :

(i) $\forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d)$;

(ii) $\forall y(\forall xP(x, y) \rightarrow \exists zQ(x, z))$;

(iii) $\exists x\forall yP(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall zR(z))$;

(iv) $\exists z(\exists xQ(x, z) \vee \exists xR(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists xR(x) \wedge \forall x\exists zQ(z, x))$.

(S7.3) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

$$\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi);$$

(ii) pentru orice formulă φ și orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\models \varphi \rightarrow \forall x\varphi;$$

(iii) pentru orice variabilă x și orice termen t cu $x \notin Var(t)$,

$$\models \exists x(x = t).$$