FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Examen

Nume: ______________________

Prenume: __________________

Grupa: _____________________

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	Oficiu	TOTAL
__/1	__/2	__/1	__/1	__/1	__/1,5	__/1,5	__/3	__/2	1	_____/15

1 Teoria mulţimilor

(P1) [1 punct] Fie α un cardinal infinit şi β un cardinal nenul astfel încât $\beta \leq \alpha$. Demonstraţi că $\alpha \cdot \beta = \alpha$.
Demonstraţie: Din Propoziţia 2.26.(iv),(iii) şi Propoziţia. 2.27, obţinem că

$$\alpha \leq \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \alpha = \alpha.$$

Deci, $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$ şi $\alpha \cdot \beta \leq \alpha$. Aplicând Teorema Cantor-Schröder-Bernstein, rezultă că $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

(P2) [2 puncte] Fie α un cardinal infinit şi β un cardinal astfel încât $\mathbf{2} \leq \beta \leq \mathbf{2}^\alpha$. Demonstraţi că $\beta^\alpha = \mathbf{2}^\alpha$.
Demonstraţie: Deoarece $\mathbf{2} \leq \beta$, aplicăm Propoziţia 2.35.(ii) pentru a obţine că $\mathbf{2}^\alpha \leq \beta^\alpha$. Avem, de asemenea, că

$$\begin{aligned} \beta^\alpha &\leq (\mathbf{2}^\alpha)^\alpha \quad \text{din ipoteză şi Propoziţia 2.35.(ii)} \\ &= \mathbf{2}^{\alpha\cdot\alpha} \quad \text{din Propoziţia 2.35.(i)} \\ &= \mathbf{2}^\alpha \quad \text{conform Propoziţiei 2.27.} \end{aligned}$$

Aplicăm acum Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a obţine că $\beta^\alpha = \mathbf{2}^\alpha$.

(P3) [1 punct] Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Demonstraţi că

$$|(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = |[a,b]| = \mathfrak{c}.$$

Demonstraţie: Conform (S2.4), $|(a,b)| = \mathfrak{c}$. Avem că

$$\begin{aligned} |[a,b)| &= |(a,b) \cup \{a\}| = |(a,b)| + |\{a\}| = \mathfrak{c} + \mathbf{1} = \mathfrak{c} \\ |(a,b]| &= |(a,b) \cup \{b\}| = |(a,b)| + |\{b\}| = \mathfrak{c} + \mathbf{1} = \mathfrak{c} \\ |[a,b]| &= |(a,b) \cup \{a,b\}| = |(a,b)| + |\{a,b\}| = \mathfrak{c} + \mathbf{2} = \mathfrak{c}. \end{aligned}$$

2 Logica propoziţională

(P4) [1 punct] Reamintim că $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mulţimea variabilelor din logica propoziţională. Fie $W := \{v_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Să se demonstreze că W este numărabilă.
Demonstraţie: Fie $2\mathbb{N}$ mulţimea numerelor pare. Deoarece $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ este o bijecţie, rezultă că $2\mathbb{N}$ este numărabilă. Fie

$$g : 2\mathbb{N} \to W,\ g(2n) = v_{2n}.$$

Cum g este bijecţie, obţinem că W este de asemenea numărabilă.

(P5) [1 punct] Arătaţi că pentru orice formule φ, ψ, χ, avem:

$$\varphi \to (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi).$$

Demonstraţie: Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \vee \chi)) = e^+((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi)),$$

deci că

$$e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) = (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \vee (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(i) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) &= 1 \to (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) = e^+(\psi) \vee e^+(\chi) \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \vee (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\psi)) \vee (1 \to e^+(\chi)) \\ &= e^+(\psi) \vee e^+(\chi). \end{aligned}$$

(ii) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) &= 0 \to (e^+(\psi) \vee e^+(\chi)) = 1 \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \vee (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) &= (0 \to e^+(\psi)) \vee (0 \to e^+(\chi)) = 1 \vee 1 = 1. \end{aligned}$$

(P6) [1,5 puncte] Fie φ, $\psi \in Form$. Să se arate sintactic:

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi).$$

Demonstraţie: Avem:

(1)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \psi \to \neg\varphi$	Propoziţia 3.37.(ii)
(2)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 3.37.(ii)
(3)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash (\psi \to \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\psi)$	(42) din Prop. 3.50 şi Prop. 3.38.(ii)
(4)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \neg\psi$	(MP): (1), (3)
(5)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(41) din Prop. 3.50 şi Prop. 3.38.(ii)
(6)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	Propoziţia 3.47 pentru (5), (4)
(7)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (2), (6)
(8)	$\{\psi \to \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(9)		$\vdash (\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	Teorema deducţiei
(10)		$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \to \neg\varphi)$	(MP): (9), (42) din Prop. 3.50
(11)		$\vdash (\varphi \land \psi) \to (\psi \land \varphi)$.	Definiţia lui $\land$.

(P7) [1,5 puncte] Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de formule. Demonstraţi următoarele:

(i) Pentru orice formulă ψ,

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \psi \quad & \text{dacă şi numai dacă} \quad \vdash \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \to \psi \\ & \text{dacă şi numai dacă} \quad \{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\} \vdash \psi. \end{aligned}$$

(ii) Γ este consistentă dacă şi numai dacă $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\}$ este consistentă.

Demonstraţie:

(i) Avem că

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \psi \quad & \Leftrightarrow \quad \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi \\ & \Leftrightarrow \quad \vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \ldots \to (\varphi_n \to \psi) \ldots) \quad \text{aplicăm Teorema deducţiei de } n \text{ ori} \\ & \Leftrightarrow \quad \vdash \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \to \psi \\ & \qquad \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \ldots \to (\varphi_n \to \psi) \ldots) \sim \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \to \psi \text{ şi Propoziţia 3.56} \\ & \Leftrightarrow \quad \{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\} \vdash \psi \quad \text{aplicăm Teorema deducţiei.} \end{aligned}$$

(ii) Γ este inconsistentă ddacă $\Gamma \vdash \bot$ (conform Propoziţiei 3.59) ddacă $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\} \vdash \bot$ (din (i)) ddacă $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\}$ este inconsistentă.

(P8) [3 puncte]

(i) Să se aducă formula $\varphi := (v_3 \land v_1) \to ((\neg v_1 \to v_2) \land (v_3 \to \neg v_4))$ la FND şi FNC folosind transformări sintactice.

(ii) Să se aducă formula $\psi := v_3 \to (\neg v_1 \leftrightarrow v_2)$ la FND şi FNC folosind funcţia booleană asociată.

Demonstraţie:

(i) Avem

$$\begin{array}{rcll}
\varphi & \sim & (v_3 \wedge v_1) \to \big((\neg\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_3 \to \neg v_4)\big) & \text{Pasul 1 (înlocuirea implicaţiei)} \\
& \sim & (v_3 \wedge v_1) \to \big((\neg\neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4)\big) & \text{Pasul 1 (înlocuirea implicaţiei)} \\
& \sim & \neg(v_3 \wedge v_1) \vee \big((\neg\neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4)\big) & \text{Pasul 1 (înlocuirea implicaţiei)} \\
& \sim & \neg(v_3 \wedge v_1) \vee \big((v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4)\big) & \text{Pasul 2 (eliminarea dublei negaţii)} \\
& \sim & (\neg v_3 \vee \neg v_1) \vee \big((v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4)\big) & \text{Pasul 2 (de Morgan).}
\end{array}$$

Obţinem FNC astfel:

$$\begin{array}{rcll}
\varphi & \sim & (\neg v_3 \vee \neg v_1) \vee \big((v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4)\big) & \\
& \sim & \big((\neg v_3 \vee \neg v_1) \vee (v_1 \vee v_2)\big) \wedge \big((\neg v_3 \vee \neg v_1) \vee (\neg v_3 \vee \neg v_4)\big) & \text{Pasul 3} \\
& \sim & (\neg v_3 \vee \neg v_1 \vee v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_1 \vee \neg v_3 \vee \neg v_4) & \vee \text{ asociativă}
\end{array}$$

Prin urmare,

$$\varphi^{FNC} = (\neg v_3 \vee \neg v_1 \vee v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_1 \vee \neg v_3 \vee \neg v_4).$$

Obţinem FND astfel:

$$\begin{array}{rcll}
\varphi & \sim & (\neg v_3 \vee \neg v_1) \vee \big((v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4)\big) & \\
& \sim & (\neg v_3 \vee \neg v_1) \vee \big((v_1 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_4) \vee (v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_2 \wedge \neg v_4)\big) & \text{Pasul 3} \\
& \sim & \neg v_3 \vee \neg v_1 \vee (v_1 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_4) \vee (v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_2 \wedge \neg v_4) & \vee \text{ asociativă}
\end{array}$$

Prin urmare,

$$\varphi^{FND} = \neg v_3 \vee \neg v_1 \vee (v_1 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_4) \vee (v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_2 \wedge \neg v_4).$$

(ii) Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate

$$F_\psi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}, \quad F_\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \varepsilon_3 \to (\neg\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2).$$

ε_1	ε_2	ε_3	$\neg\varepsilon_1$	$\neg\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$	$F_\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	
1	1	1	0	0	0	$D_1 = \neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$
1	1	0	0	0	1	$C_1 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
1	0	1	0	1	1	$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
1	0	0	0	1	1	$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
0	1	1	1	1	1	$C_4 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$
0	1	0	1	1	1	$C_5 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
0	0	1	1	0	0	$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$
0	0	0	1	0	1	$C_6 = \neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$.

Aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 3.74 şi 3.75, obţinem că:

$$\psi^{FND} = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5 \vee C_6$$

este o formă normală disjunctivă a lui ψ şi că

$$\psi^{FNC} = D_1 \wedge D_2$$

este o formă normală conjunctivă a lui ψ.

3 Logica de ordinul întâi

(P9) [2 puncte] Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(i) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \vDash \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.

(ii) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{╡}}\!\vDash \varphi \wedge \exists x\psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(i) Obţinem

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} \vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] & \Leftrightarrow & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \\
& \Leftrightarrow & \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \\
& \Rightarrow & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi} \\
& & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e] \\
& \Rightarrow & \mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e] \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)[e].
\end{array}
$$

(ii) Obţinem

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} \vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] & \Leftrightarrow & \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \\
& \Leftrightarrow & \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \\
& \Leftrightarrow & \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \\
& & \text{conform Propoziţiei 4.21} \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e] \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \exists x\psi)[e].
\end{array}
$$