Procesarea semnalelor

Transformata Wavelet

Paul Irofti

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Transformata Haar

Numită după Alfréd Haar introdusă în 1910 în articolul *“Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”* din revista Mathematische Annalen, Springer.

Fie semnalul discret $x(n)$ de lungime N.

Transformata Haar descompune semnalul discret $x(n)$ în două semnale $a(n)$ și $d(n)$ de lungime $N/2$.

Media alunecătoare (scalarea, *trend*-ul)

$a(n)$ este media alunecătoare scalată cu $\sqrt{2}$ a semnalului $x(n)$.

$$
\begin{aligned}
a(1) &= \sqrt{2}\left(\frac{x(1)+x(2)}{2}\right) = \frac{x(1)+x(2)}{\sqrt{2}} \\
a(2) &= \sqrt{2}\left(\frac{x(3)+x(4)}{2}\right) = \frac{x(3)+x(4)}{\sqrt{2}} \\
&\vdots \\
a(k) &= \sqrt{2}\left(\frac{x(2k-1)+x(2k)}{2}\right) = \frac{x(2k-1)+x(2k)}{\sqrt{2}} \qquad (1) \\
&\vdots \\
a(N/2) &= \sqrt{2}\left(\frac{x(2N/2-1)+x(2N/2)}{2}\right) = \frac{x(N-1)+x(N)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Denumit adesea și *trend*-ul lui $x(n)$.

Fluctuația (diferența alunecătoare, undina, *wavelet*-ul)

$d(n)$ este fluctuația scalată cu $\sqrt{2}$ a semnalului $x(n)$.

$$
\begin{aligned}
d(1) &= \sqrt{2}\left(\frac{x(1)-x(2)}{2}\right) = \frac{x(1)-x(2)}{\sqrt{2}} \\
d(2) &= \sqrt{2}\left(\frac{x(3)-x(4)}{2}\right) = \frac{x(3)-x(4)}{\sqrt{2}} \\
&\vdots \\
d(k) &= \sqrt{2}\left(\frac{x(2k-1)-x(2k)}{2}\right) = \frac{x(2k-1)-x(2k)}{\sqrt{2}} \qquad (2) \\
&\vdots \\
d(N/2) &= \sqrt{2}\left(\frac{x(2N/2-1)-x(2N/2)}{2}\right) = \frac{x(N-1)-x(N)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Reprezintă diferența alunecătoare a lui $x(n)$, folosit la crearea semnalului *wavelet* (undină în limba română).

Exemplu descompunere Haar

Fie $x = [4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5]$, atunci

$$a(1) = \frac{x(1) + x(2)}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \qquad d(1) = \sqrt{2}\left(\frac{x(1) - x(2)}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$a(2) = \frac{x(3) + x(4)}{\sqrt{2}} = 11\sqrt{2} \qquad d(2) = \sqrt{2}\left(\frac{x(3) - x(4)}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$a(3) = \frac{x(5) + x(6)}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \qquad d(3) = \sqrt{2}\left(\frac{x(5) - x(6)}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$a(4) = \frac{x(7) + x(8)}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \qquad d(4) = \sqrt{2}\left(\frac{x(7) - x(8)}{2}\right) = 0$$

Notăm cu a^1 și d^1 semnalele obținute reprezentând primul trend, respectiv, prima fluctuație a semnalului x.

Transformata Haar: primul nivel

Transformata Haar constă în aplicarea succesivă, pe mai multe nivele, a descompunerii în două semnale.

Primul nivel este reprezentat prin aplicația H_1:

$$x \xrightarrow{H_1} \left(a^1 \mid d^1\right) \tag{3}$$

Din exemplul anterior:

$$[4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5] \xrightarrow{H_1} (5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Are H_1 inversă?

Transformata Haar: primul nivel

Transformata Haar constă în aplicarea succesivă, pe mai multe nivele, a descompunerii în două semnale.

Primul nivel este reprezentat prin aplicația H_1:

$$x \xrightarrow{H_1} \left(a^1 \mid d^1\right) \tag{3}$$

Din exemplul anterior:

$$[4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5] \xrightarrow{H_1} (5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Are H_1 inversă? Da, semnalul x este recuperat folosind a^1 și d^1:

$$\left(\frac{a_1^1 + d_1^1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1^1 - d_1^1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_{N/2}^1 + d_{N/2}^1}{\sqrt{2}}, \frac{a_{N/2}^1 - d_{N/2}^1}{\sqrt{2}}\right) \tag{4}$$

Proprietăți: atenuarea fluctuațiilor

Remarcă

Magnitudinea eșantioanelor din semnalul fluctuațiilor d este semnificativ redusă față de valorile semnalului descompus x.

Această proprietate este dictată de pasul de eșantionare t_s.

Cu cât t_s este mai mic, cu atât diferența între două eșantioane are o probabilitate mai mare de a fi scăzută.

Astfel magnitudinile flutuațiilor Haar urmează modelul:

$$t_s \to 0 \implies d(k) = \frac{x(2k-1) - x(2k)}{\sqrt{2}} \to 0 \tag{5}$$

Proprietăți: atenuarea fluctuațiilor

Trendul a este afectat în mod similar de pasul t_s.

Cu cât t_s este mai mic, cu atât diferența între două eșantioane are o probabilitate mai mare de a fi scăzută.

Astfel două eșantioane consecutive au valori apropiate, $x(2k) \approx x(2k-1)$, trendul $a(k)$ putând fi aproximat de:

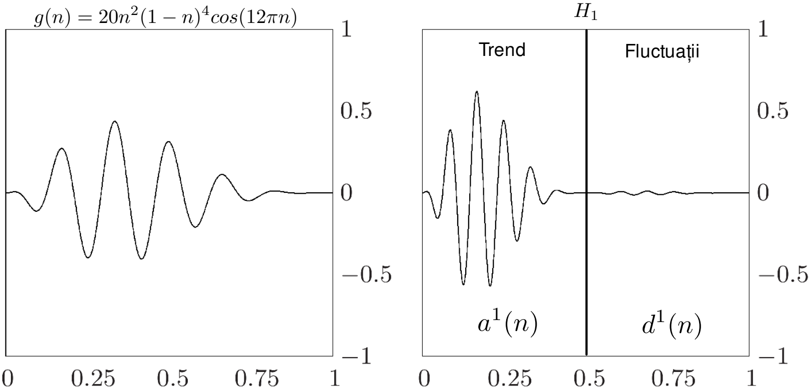
$$t_s \to 0 \implies a(k) = \frac{x(2k-1) + x(2k)}{\sqrt{2}} \to \sqrt{2}x(2k) \qquad (6)$$

Remarcă

Tranformata Haar are aplicații directe în compresie: transmitem doar semnalul descompus a^1 (rată 2:1) cu care receptorul calculează inversa folosind (4) *unde* $d^1 = 0$.

Exemplu: atenuarea fluctuațiilor

Fie semnalul $g(n) = 20x^2(1-n)^4 cos(12\pi n)$.



Sursă: Walker 2008

În figura din dreapta se observă clar atenuarea fluctuațiilor și păstrarea trendului general al semnalului original.

Proprietăți: conservarea energiei

Propoziție

Transformarea Haar în semnalele a și d conservă energia semnalului original x.

$$\|x\|_2^2 = \|(a \mid d)\|_2^2 \tag{7}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}\|(a \mid d)\|_2^2 &= \|[a(1)\dots a(N/2)\ d(1)\dots d(N/2)]\|_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N/2} a(k)^2 + \sum_{k=1}^{N/2} d(k)^2 = \sum_{k=1}^{N/2}\left[a(k)^2 + d(k)^2\right]\end{aligned}$$

$$a(k)^2 + d(k)^2 = \left[\frac{x(2k-1)+x(2k)}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{x(2k-1)-x(2k)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \frac{x(2k-1)^2 + 2x(2k-1)x(2k) + x(2k)^2}{2} +$$

$$+ \frac{x(2k-1)^2 - 2x(2k-1)x(2k) + x(2k)^2}{2} = x(2k-1)^2 + x(2k)^2$$

Proprietăți: compactare energiei

Remarcă

Transformarea Haar compactează energia semnalului x în trendul a.

$$\|x\|_2^2 \approx \|a\|_2^2 \tag{8}$$

Cu cât pasul de eșantionare t_s este mai mic, cu atât a conține mai mult din energia semnalului x.

Demonstrație:

$$\|a\|_2^2 = \sum_{k=1}^{N/2} a(k)^2 = \sum_{k=1}^{N/2} \left[\frac{x(2k-1)^2 + x(2k)^2}{\sqrt{2}}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N/2} \left[x(2k-1)^2 + x(2k)^2 + 2x(2k-1)x(2k)\right] =$$

$$= \frac{\|x\|_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N/2} 2x(2k-1)x(2k)$$

Proprietăți: compactare energiei

Demonstrație (continuare):

$$
\begin{aligned}
\|a\|_2^2 &= \frac{\|x\|_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N/2} 2x(2k-1)x(2k) \\
&= \frac{\|x\|_2^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{N/2} \underbrace{x(2k-1)x(2k)}_{x(2k)\approx x(2k-1) \;\; \text{cf (6)}} + \sum_{k=1}^{N/2} \underbrace{x(2k-1)x(2k)}_{x(2k-1)\approx x(2k)}\right] \\
&\approx \frac{\|x\|_2^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{N/2} x(2k-1)^2 + \sum_{k=1}^{N/2} x(2k)^2\right] = \frac{\|x\|_2^2}{2} + \frac{\|x\|_2^2}{2} \\
&= \|x\|_2^2
\end{aligned}
$$

Exemplu: compactare energiei

Fie $x = [4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5]$, atunci $\|x\|_2^2 = 446$.
Am calculat descompunerea în a și d unde:

$$(a \mid d) = (5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Iar normele celor două componente sunt:

$$\|a\|_2^2 = 440 \qquad \|d\|_2^2 = 6$$

ceea ce arată o compactare a energiei de $440/446 = 98,7\%$.

Pentru semnalul $g(n)$ din figura anterioară

$$\|g\|_2^2 = 127,308 \qquad \|a\|_2^2 = 127,305$$

ceea ce duce la o compactare a energiei de $99,998\%$ pentru jumătate din suportul lui $g(n)$!

Transformata Haar: multi-nivel

O dată aplicată H_1 se poate aplica din nou descompunerea pornind de la trendul a^1 obținând descompunerea

$$a^1 \xrightarrow{H_1} \left(a^2 \mid d^2\right) \tag{9}$$

unde a^2 este al doilea trend, trendul-trendului, și d^2 sunt fluctuațile primului trend.

Putem rescrie $x = (a^2 \mid d^2 \mid d^1)$.

Aplicând din nou H_1 asupra lui a^2 obținem $(a^3 \mid d^3 \mid d^2 \mid d^1)$.

Transformata Haar: multi-nivel

O dată aplicată H_1 se poate aplica din nou descompunerea pornind de la trendul a^1 obținând descompunerea

$$a^1 \xrightarrow{H_1} \left(a^2 \mid d^2\right) \tag{9}$$

unde a^2 este al doilea trend, trendul-trendului, și d^2 sunt fluctuațile primului trend.

Putem rescrie $x = (a^2 \mid d^2 \mid d^1)$.

Aplicând din nou H_1 asupra lui a^2 obținem $(a^3 \mid d^3 \mid d^2 \mid d^1)$.

$$\vdots$$

Transformata Haar: multi-nivel

O dată aplicată H_1 se poate aplica din nou descompunerea pornind de la trendul a^1 obținând descompunerea

$$a^1 \xrightarrow{H_1} \left(a^2 \mid d^2\right) \tag{9}$$

unde a^2 este al doilea trend, trendul-trendului, și d^2 sunt fluctuațile primului trend.

Putem rescrie $x = (a^2 \mid d^2 \mid d^1)$.

Aplicând din nou H_1 asupra lui a^2 obținem $(a^3 \mid d^3 \mid d^2 \mid d^1)$.

$$\vdots$$

Până când?

Transformata Haar: multi-nivel

O dată aplicată H_1 se poate aplica din nou descompunerea pornind de la trendul a^1 obținând descompunerea

$$a^1 \xrightarrow{H_1} \left(a^2 \mid d^2\right) \tag{9}$$

unde a^2 este al doilea trend, trendul-trendului, și d^2 sunt fluctuațile primului trend.

Putem rescrie $x = (a^2 \mid d^2 \mid d^1)$.

Aplicând din nou H_1 asupra lui a^2 obținem $(a^3 \mid d^3 \mid d^2 \mid d^1)$.

$$\vdots$$

Până când? Până la $N/2$!

$$x = (a^{N/2} \mid d^{N/2} \mid d^{N/2-1} \mid \cdots \mid d^2 \mid d^1) \tag{10}$$

Proprietăți: multi-nivel

Atenuarea fluctuațiilor rămâne în continuare valabilă când ne raportăm la magnitudinea trendului vs fluctuației pe fiecare nivel,

Chiar și în general între trendul final $a^{N/2}$ și restul semnalelor de fluctuație d există o diferență semnificativă în magnitudine.

Conservarea energiei. Fiind vorba de aceiași aplicație H_1, proprietățile de conservare și compactare a eneregiei se păstrează.

Principiul incertitudinii. Nu putem localiza o cantitate fixă de energie într-un interval de timp scurt.

Concret, ne așteptăm ca în semnalele trend de nivel superior procentul compactării energiei să scadă.

Exemplu: multi-nivel

Fie $x = [4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5]$ cu $a^1 = [5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$ și $d^1 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]$ calculate anterior.

Exemplu: multi-nivel

Fie $x = [4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5]$ cu $a^1 = [5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$ și $d^1 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]$ calculate anterior.

Atunci $a^2 = [16, 12]$ și $d^2 = [-6, 2]$, iar semnalul devine:

$$(a^2 \mid d^2 \mid d^1) = (16, 12 \mid -6, 2 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Exemplu: multi-nivel

Fie $x = [4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5]$ cu $a^1 = [5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$ și $d^1 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]$ calculate anterior.

Atunci $a^2 = [16, 12]$ și $d^2 = [-6, 2]$, iar semnalul devine:

$$(a^2 \mid d^2 \mid d^1) = (16, 12 \mid -6, 2 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Atunci $a^3 = [14\sqrt{2}]$ și $d^2 = [2\sqrt{2}]$, iar semnalul devine:

$$(a^3 \mid d^3 \mid d^2 \mid d^1) = (14\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2} \mid -6, 2 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Exemplu: multi-nivel

Fie $x = [4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5]$ cu $a^1 = [5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$ și $d^1 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]$ calculate anterior.

Atunci $a^2 = [16, 12]$ și $d^2 = [-6, 2]$, iar semnalul devine:

$$(a^2 \mid d^2 \mid d^1) = (16, 12 \mid -6, 2 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Atunci $a^3 = [14\sqrt{2}]$ și $d^2 = [2\sqrt{2}]$, iar semnalul devine:

$$(a^3 \mid d^3 \mid d^2 \mid d^1) = (14\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2} \mid -6, 2 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Observăm cum energia este în continuare compactată în semnalul de trend la fiecare nivel, dar raportul scade la fiecare pas.

$$\|x\|_2^2 = 446 \qquad \left\|a^1\right\|_2^2 = 440 \qquad \left\|a^2\right\|_2^2 = 400 \qquad \left\|a^3\right\|_2^2 = 392$$

o scădere de aproape 99% la a^1, 90% la a^2 și 88% la a^3.

Exemplu: multi-nivel

Fie $x = [4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5]$ cu $a^1 = [5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$ și $d^1 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]$ calculate anterior.

Atunci $a^2 = [16, 12]$ și $d^2 = [-6, 2]$, iar semnalul devine:

$$(a^2 \mid d^2 \mid d^1) = (16, 12 \mid -6, 2 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Atunci $a^3 = [14\sqrt{2}]$ și $d^2 = [2\sqrt{2}]$, iar semnalul devine:

$$(a^3 \mid d^3 \mid d^2 \mid d^1) = (14\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2} \mid -6, 2 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Observăm cum energia este în continuare compactată în semnalul de trend la fiecare nivel, dar raportul scade la fiecare pas.

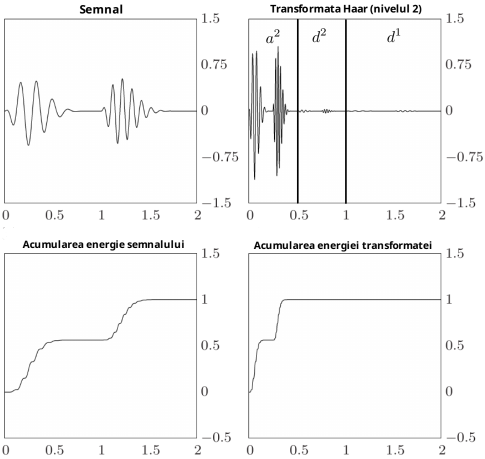
$$\|x\|_2^2 = 446 \qquad \left\|a^1\right\|_2^2 = 440 \qquad \left\|a^2\right\|_2^2 = 400 \qquad \left\|a^3\right\|_2^2 = 392$$

o scădere de aproape 99% la a^1, 90% la a^2 și 88% la a^3.

Heisenberg!

Analiza acumulării energiei

$$\left[\frac{x_1^2}{\|x\|_2^2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{\|x\|_2^2}, \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\|x\|_2^2}, \dots, 1 \right] \tag{11}$$



Sursă: Walker 2008

Forma matricială: wavelet

Spunem că semnalele wavelet de nivel întâi Haar sunt:

$$W_1^1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0 \ldots, 0\right] \implies d(1) = W_1^1 x^T$$

$$W_1^2 = \left[0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \ldots, 0\right] \implies d(2) = W_1^2 x^T$$

$$W_1^3 = \left[0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \ldots, 0\right] \implies d(3) = W_1^3 x^T$$

$$\vdots$$

$$W_1^{N/2} = \left[0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right] \implies d(N/2) = W_1^{N/2} x^T$$

Astfel putem scrie $d^1 = W_1 x^T$, unde $W_1 \in \mathbb{R}^{N/2 \times N}$ are pe linii semnalele wavelet de mai sus.

Forma matricială: scalare

Spunem că semnalele de scalare de nivel întâi Haar sunt:

$$V_1^1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0 \ldots, 0\right] \implies a(1) = V_1^1 x^T$$

$$V_1^2 = \left[0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \ldots, 0\right] \implies a(2) = V_1^2 x^T$$

$$V_1^3 = \left[0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, 0\right] \implies a(3) = V_1^3 x^T$$

$$\vdots$$

$$V_1^{N/2} = \left[0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \implies a(N/2) = V_1^{N/2} x^T$$

Astfel putem scrie $a^1 = V_1 x^T$, unde $V_1 \in \mathbb{R}^{N/2 \times N}$ are pe linii semnalele de scalare de mai sus.

Forma matricială: proprietăți

Forma matricială: proprietăți

- operațiile rămân aceleași

Forma matricială: proprietăți

- operațiile rămân aceleași
- se păstrează atenuarea fluctuațiilor

Forma matricială: proprietăți

- operațiile rămân aceleași
- se păstrează atenuarea fluctuațiilor
- se păstrează conservarea energiei

Forma matricială: proprietăți

- operațiile rămân aceleași
- se păstrează atenuarea fluctuațiilor
- se păstrează conservarea energiei
- se păstrează compactarea energiei

Forma matricială: proprietăți

- operațiile rămân aceleași
- se păstrează atenuarea fluctuațiilor
- se păstrează conservarea energiei
- se păstrează compactarea energiei
- suport mic de două elemente

Forma matricială: proprietăți

- operațiile rămân aceleași
- se păstrează atenuarea fluctuațiilor
- se păstrează conservarea energiei
- se păstrează compactarea energiei
- suport mic de două elemente
- toate semnalele pot fi reprezentate drept o întârziere a primului, sau o rotație a oricăreia dintre ele, cu două unități

Forma matricială: proprietăți

- operațiile rămân aceleași
- se păstrează atenuarea fluctuațiilor
- se păstrează conservarea energiei
- se păstrează compactarea energiei
- suport mic de două elemente
- toate semnalele pot fi reprezentate drept o întârziere a primului, sau o rotație a oricăreia dintre ele, cu două unități
- sunt normate și au medie $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Forma matricială: nivelul doi

Spunem că semnalele wavelet de nivel doi Haar sunt:

$$
\begin{aligned}
W_2^1 &= \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 0 \ldots, 0\right] \implies d^2(1) = W_2^1 x^T \\
W_2^2 &= \left[0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 0 \ldots, 0\right] \implies d^2(2) = W_2^2 x^T \\
&\vdots \\
W_2^{N/4} &= \left[0, 0 \ldots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2},\right] \implies d^2(N/2) = W_2^{N/2} x^T
\end{aligned}
$$

Astfel putem scrie $d^2 = W_2 x^T$, unde $W_2 \in \mathbb{R}^{N/4 \times N}$ are pe linii semnalele wavelet de mai sus.

Forma matricială: nivelul doi

Spunem că semnalele de scalare de nivel doi Haar sunt:

$$V_2^1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \ldots, 0\right] \implies a^2(1) = V_2^1 x^T$$

$$V_2^2 = \left[0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \ldots, 0\right] \implies a^2(2) = V_2^2 x^T$$

$$\vdots$$

$$V_2^{N/4} = \left[0, 0 \ldots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},\right] \implies a^2(N/2) = V_2^{N/2} x^T$$

Astfel putem scrie $a^2 = V_2 x^T$, unde $V_2 \in \mathbb{R}^{N/4 \times N}$ are pe linii semnalele de scalare de mai sus.

Formulare multi-rezoluție

Definiție

Sinteza. *Analiza multirezoluție privește descompunerea semnalului x în mai multe componente obținute din transformata multi-nivel wavelet: $a^{N/2}, d^{N/2}, \ldots, d^1$ drept faza de sintetizare.*

Definiție

Analiza. *Recompunerea din componente a semnanlului x este denumită partea de analiză.*

Definiție

Multi-rezoluție. *Reprezentarea inversă multi-nivel wavelet reproducere semnalului original x pornind de la un semnal de rezoluție mică $a^{N/2}$. Adăugăm succesiv deliile cuprinse în nivelele $d^{N/2}, \ldots, d^1$ până la recuperarea completă sau până satisfacem calitatea dorită de utilizator.*

Multi-rezoluție: semnale

Semnal medie de nivelul unu

$$A^1 = \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_2}{\sqrt{2}}, \frac{a_2}{\sqrt{2}}, \dots \frac{a_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{a_{N/2}}{\sqrt{2}}, \dots \right) \tag{12}$$

Semnal detalii de nivelul unu

$$D^1 = \left(\frac{d_1}{\sqrt{2}}, \frac{-d_1}{\sqrt{2}}, \frac{d_2}{\sqrt{2}}, \frac{-d_2}{\sqrt{2}}, \dots \frac{d_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{-d_{N/2}}{\sqrt{2}}, \dots \right) \tag{13}$$

Ce pot fi scrise drept

$$A^1 = a_1 V_1^1 + a_2 V_2^1 + \cdots + a_{N/2} V_{N/2}^1$$
$$D^1 = d_1 W_1^1 + d_2 W_2^1 + \cdots + d_{N/2} W_{N/2}^1$$

Dacă extindem mai departe pe a^1 și d^1 obținem

$$A^1 = (V_1^1 x^T) V_1^1 + (V_2^1 x^T) V_2^1 + \cdots + (V_{N/2}^1 x^T) V_{N/2}^1$$
$$D^1 = (W_1^1 x^T) W_1^1 + (W_2^1 x^T) W_2^1 + \cdots + (W_{N/2}^1 x^T) W_{N/2}^1$$

Exemplu: semnale multi-rezoluție

Multi-rezoluție: multi-nivel

Pornind de la (4) observăm că putem scrie x drept:

$$x = \left[\frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1}{\sqrt{2}} \frac{a_2}{\sqrt{2}}, \frac{a_2}{\sqrt{2}} \dots \frac{a_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{a_{N/2}}{\sqrt{2}}\right] +$$
$$+ \left[\frac{d_1}{\sqrt{2}}, \frac{-d_1}{\sqrt{2}} \frac{d_2}{\sqrt{2}}, \frac{-d_2}{\sqrt{2}} \dots \frac{d_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{-d_{N/2}}{\sqrt{2}}\right] = A^1 + D^1$$

Dacă descompunem mai departe trendul de nivel întâi, iar apoi pe cel de nivel doi, până ajungem la ultimul nivel, obținem:

$$x = A^1 + D^1 = \underbrace{A^2 + D^2}_{A^1} + D^1 = \dots \tag{14}$$

$$= A^{N/2} + D^{N/2} + D^{N/2-1} \dots + D^2 + D^1 \tag{15}$$

Exemplu: multi-rezoluție multi-nivel

Analiza multirezoluție a semnalului $g(n) = 20n^2(1-n)^4 cos(12\pi n)$.