Procesarea semnalelor

Domeniul timpului. Sisteme.

Paul Irofti

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
Departmentul de Informatică
Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

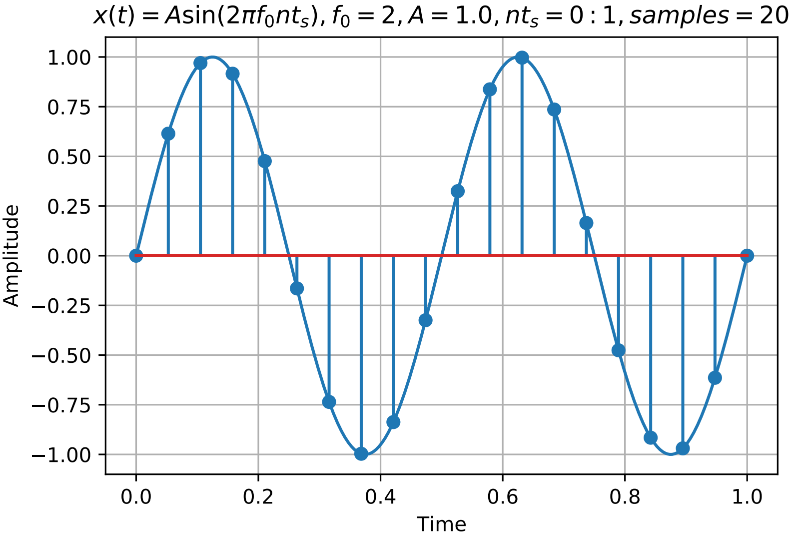
Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) \tag{2}$$

unde

- f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \dots$
- t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- nt_s – orizontul de timp (s)
- $f_0 nt_s$ – numărul de oscilații măsurat
- $2\pi f_0 nt$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)

Exemple: sinusoide discretizate



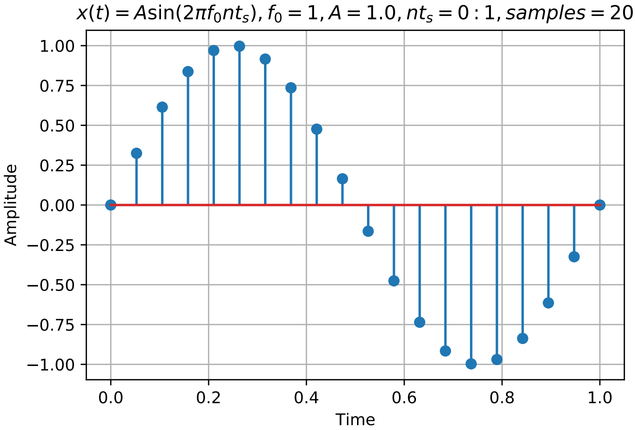
Domeniul timpului

Ecuațiile (1) și (2) reprezintă semnale în domeniul timpului deoarece variabilele t, respectiv nt_s, măsoară timpul.

Amplitudine

Definiție

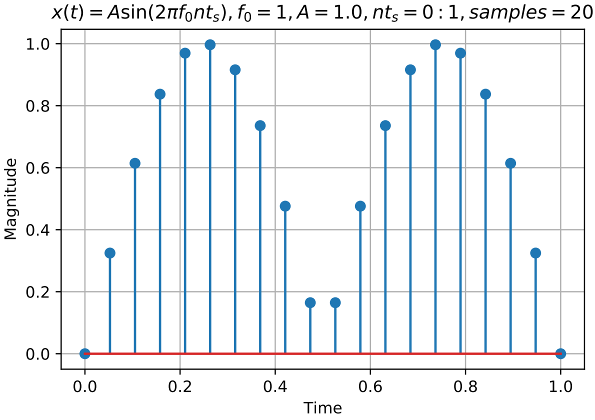
Amplitudinea indică distanța și sensul direcției de la zero a unei variabile (ex. eșantion $x(n)$).



Magnitudine

Definiție

Magnitudinea indică doar distanța, indistinct de sens, de la zero a unei variabile (ex. eșantion $|x(n)|$).



Putere

Definiție

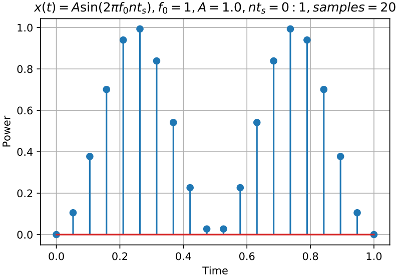
Puterea unui semnal este proporțională cu amplitudinea (sau magnitudinea) la pătrat

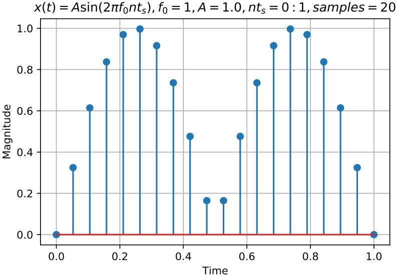
$$x_{pwr}(n) = |x(n)|^2$$

Remarcă

Ridicarea la putere conduce la figuri și grafice în care diferența dintre valorile mici și valorile mari se adâncește. Pentru a evalua mai ușor aceste diferențe, în practică se folosește adesea scara logaritmică în decibeli (dB).

Exemplu: putere vs. magnitudine





Sisteme discrete

Definiție

Un sistem discret este o colecție de componente (hardware sau software) ce manipulează un semnal discret primit la intrare (o secvență de eșantioane) $x(0), x(1), x(2), \ldots$ *pentru a produce la ieșire semnalul discret (secvența)* $y(0), y(1), y(2), \ldots$.

Exemplu

Fie semnalul $x(n)$

$x(0) = 1 \quad x(1) = 3 \quad x(2) = 5 \quad x(3) = 7 \quad x(4) = 9$

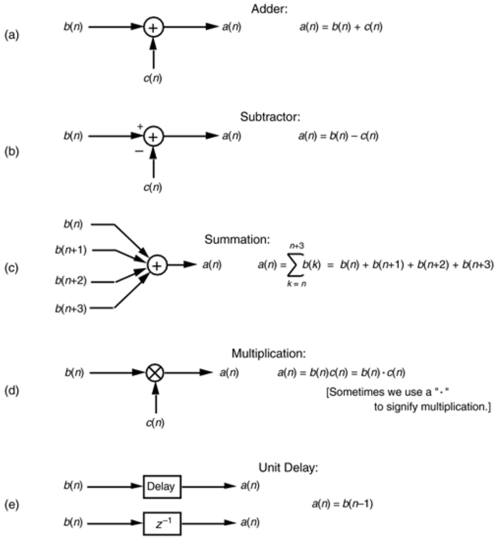
și sistemul:

$$y(n) = 2x(n) - 1$$

atunci $y(n)$ *reprezintă secvența*

$y(0) = 1 \quad y(1) = 5 \quad y(2) = 9 \quad y(3) = 13 \quad y(4) = 17.$

Operații: adunare, scădere, însumare, multiplicare, întârziere



R.G. Lyons (2004). *Understanding digital signal processing*. Prentice Hall

Sisteme liniare

Fie un sistem căruia i se aplică mai multe semnale la intrare

$$x_1(n) \Longrightarrow y_1(n)$$
$$x_2(n) \Longrightarrow y_2(n)$$
$$\dots$$

Sistemul se liniar dacă

$$x_1(n) + x_2(n) + \dots \Longrightarrow y_1(n) + y_2(n) + \dots \tag{3}$$

Definiție

Sistemele liniare sunt caracterizate prin faptul că ieșirea reprezintă superpoziția (sau suma) ieșirilor individuale dacă intrările individuale ar fi fost aplicate separat sistemului.

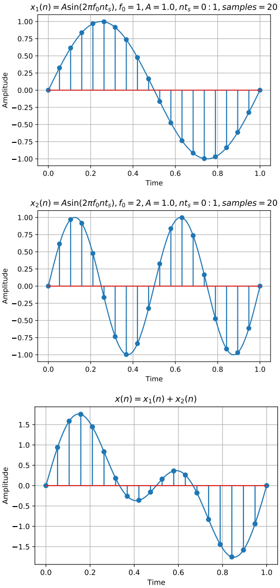
Scalare. Omogenitate.

O altă proprietate a sistemelor liniare este cea de omogenitate.

Dacă intrările sunt scalate cu anumiți coeficienți constanți c_i, atunci și ieșirile sunt scalate cu acei factori:

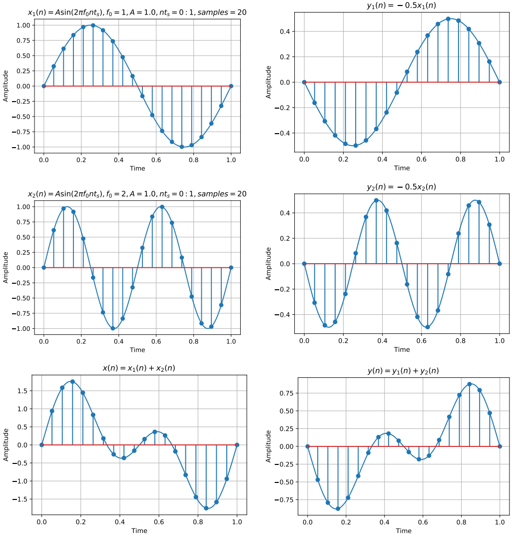
$$c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \dots \Longrightarrow c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) + \dots \tag{4}$$

Suma a două sinusoide



Exemplu sistem liniar

Fie sistemul $y(n) = \frac{-x(n)}{2}$



Sisteme neliniare

Sistemele neliniare nu respectă proprietatea de superpoziție a ieșirilor corespunzător intrărilor.

Fie sistemul $y(n) = x(n)^2$. Ce se întâmplă când aplic $x_1(n)$ și $x_2(n)$ la intrare? Dar $x_1(n) + x_2(n)$?

$$\begin{aligned} y_1(n) = x_1(n)^2 &= \sin(2\pi 1 n t_s)\sin(2\pi 1 n t_s) = \\ &= \frac{\cos(2\pi 1 n t_s - 2\pi 1 n t_s)}{2} - \frac{\cos(2\pi 1 n t_s + 2\pi 1 n t_s)}{2} = \\ &= \frac{\cos(0)}{2} - \frac{\cos(4\pi 1 n t_s)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi 2 n t_s)}{2} \end{aligned}$$

$$\implies y_2(n) = x_2(n)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi 4 n t_s)}{2}$$

Sisteme neliniare

Sistemele neliniare nu respectă proprietatea de superpoziție a ieșirilor corespunzător intrărilor.

Fie sistemul $y(n) = x(n)^2$. Ce se întâmplă când aplic $x_1(n)$ și $x_2(n)$ la intrare? Dar $x_1(n) + x_2(n)$?

$$\begin{aligned} x(n) &= x_1(n) + x_2(n) \\ y(n) &= (x_1(n) + x_2(n))^2 = x_1(n)^2 + x_2(n)^2 + 2x_1(n)x_2(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1(n)x_2(n) &= 2\sin(2\pi 1 n t_s)\sin(2\pi 2 n t_s) = \\ &= 2\left[\frac{\cos(2\pi 1 n t_s - 2\pi 2 n t_s)}{2} - \frac{\cos(2\pi 1 n t_s + 2\pi 2 n t_s)}{2}\right] = \\ &= \cos(2\pi 1 n t_s) - \cos(2\pi 3 n t_s) \end{aligned}$$

Invarianță în timp

Definiție

Un sistem discret invariant în timp este un sistem în care o întârziere sau deplasare în timp a semnalului de la intrare rezultă într-o întârziere echivalentă în timp a semnalului de la ieșire.

Fie sistemul invariant în timp:

$$x(n) \Longrightarrow y(n) \tag{5}$$

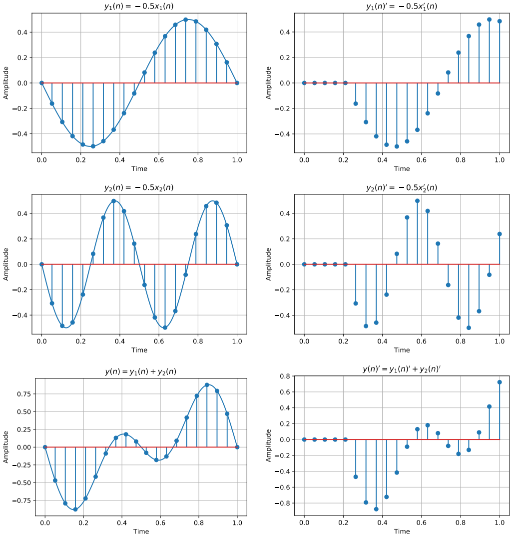
atunci pentru orice întârziere cu k perioade de eșantionare:

$$x'(n) = x(n+k) \Longrightarrow y'(n) = y(n+k). \tag{6}$$

unde $x(n)$ este o secvență oarecare.

Exemplu sistem invariant în timp

Fie sistemul $y(n) = \frac{-x(n)}{2}$ și secvența $x'(n) = x(n-4)$



Sisteme LTI

Definiție

Un sistem liniar și invariant în timp se numește un sistem LTI (Linear Time-Invariant).

Remarcă

Sistemele LTI sunt comutative:

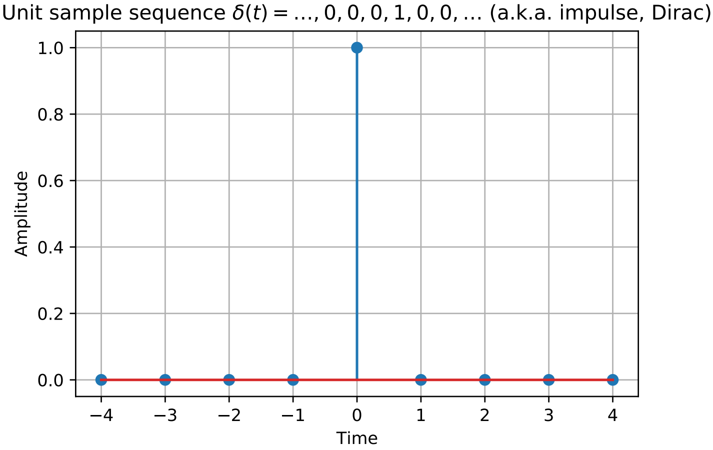
$$x(n) \xrightarrow{\text{Sistem LTI \#1}} f(n) \xrightarrow{\text{Sistem LTI \#2}} y(n) \tag{7}$$

$$x(n) \xrightarrow{\text{Sistem LTI \#2}} g(n) \xrightarrow{\text{Sistem LTI \#1}} y(n) \tag{8}$$

unde termenii intermediari $g(n)$, $f(n)$ nu sunt identici de obicei, dar rezultatul final $y(n)$ este.

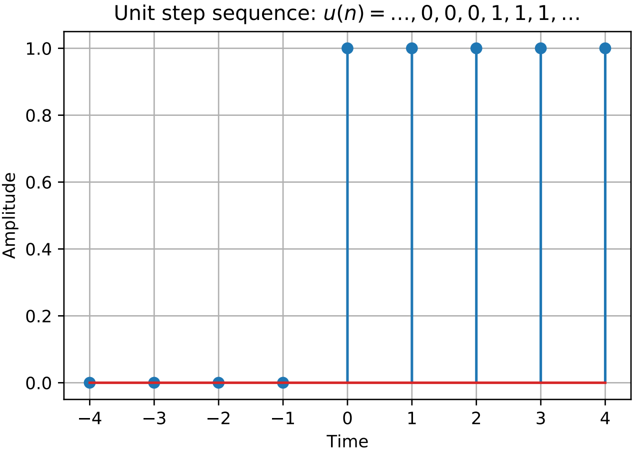
Semnale: Impuls

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases} \tag{9}$$



Semnale: Treaptă

$$u(t) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 1, n \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

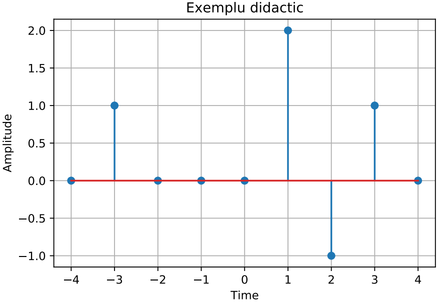


Proprietăți

Propoziție

Orice secvență poate fi scrisă în funcție de semnalul impuls:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{11}$$



$$x(n) = x(-3)\delta(n+3) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3)$$

Relații

Treapta la momentul de timp n poate fi scrisă drept suma tuturor valorilor funcției impuls

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) \tag{12}$$

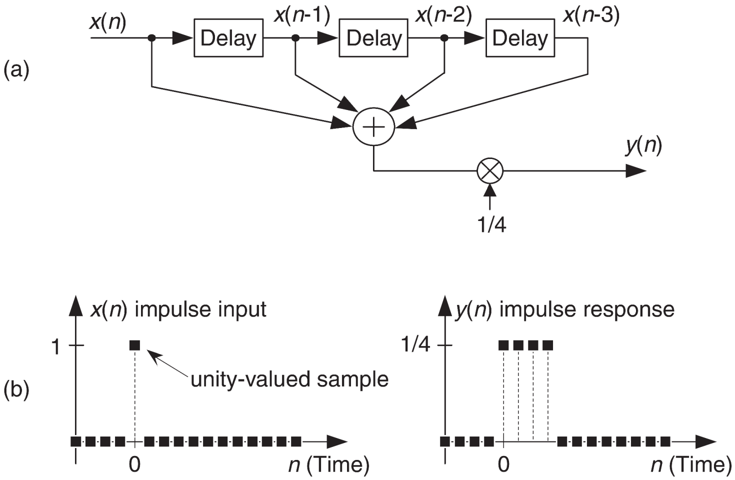
Putem privi treapta la momentul de timp n drept un impuls întârziat

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) \tag{13}$$

Impulsul la momentul de timp n poate fi scris în funcție de treaptă:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{14}$$

Semnale: Medie mobilă (*moving average*)



Source: (Lyons 2004)

$$y(n) = \frac{1}{4}(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)) = \frac{1}{4}\sum_{k=n-3}^{n} x(k)$$

Recapitulare

Continuu:

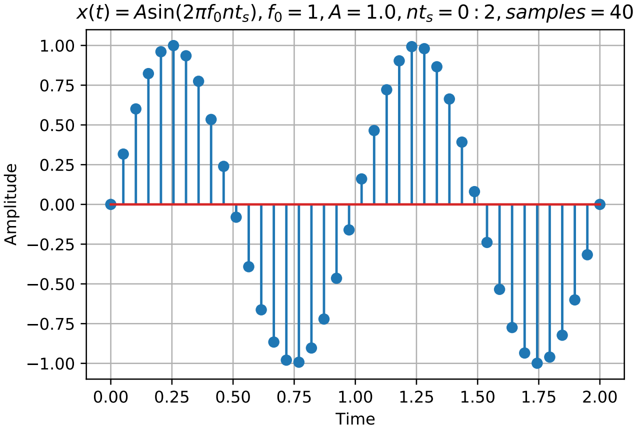
$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s)$$

Recuperarea frecvenței

Cum determin frecvența semnalului real f_0 în funcție de măsurători?



$$T = \frac{\text{eșantioane}}{\text{perioadă}} \times \underbrace{\frac{\text{timp}}{\text{eșantion}}}_{t_s} = 20 \times 0.05 = 1s \implies f_0 = 1Hz \quad (15)$$

Frecvența de eșantionare

Remarcă

Frecvența de eșantionare este inversul perioadei de eșantionare t_s

$$f_s = \frac{1}{t_s}, \tag{16}$$

iar ea afectează direct determinarea frecvenței absolute f_0*, frecvența semnalului real (original)*

Ce se întâmplă cu calculul frecvenței absolute f_0 dacă modific frecvența de eșationare f_s în (15)?

Aliasing

Fenomenul de aliere (aliasing) apare când:

$$x(n) = sin(2\pi f_0 n t_s) = sin(2\pi(f_0 + kf_s)nt_s) \tag{17}$$

Teoremă

Fie frecvența de eșantionare f_s (eșantioane / secundă) și k un număr întreg nenul. Atunci nu putem distinge eșantioanele unei sinusoide de frecvență $f_0 Hz$ de eșantioanele unei siunsoide de $f_0 + kf_s Hz$.

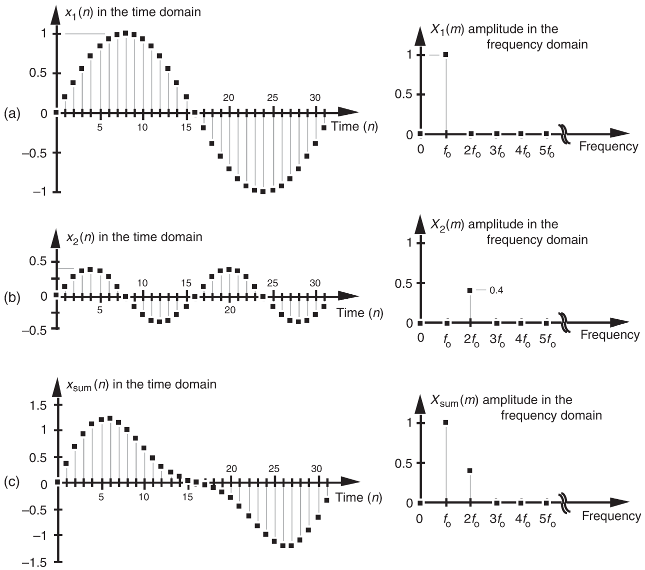
Frecvență

În analiza semnalelor suntem interesați adesea de frecvență.

Motivație:

- sinusoida are o singură componentă f_0 în frecvență, numită și **componentă spectrală**
- suma a două sinusoide de frecvență f_1, respectiv, f_2 are două componente spectrale f_1, f_2 în domeniul frecvenței
- suma a n sinusoide de frecvență $f_1, \ldots, f_n$ va avea n componente spectrale în domeniul frecvenței
- invers, putem analiza un semnal uitându-ne în frecvență și analizând din ce sinusoide este compus și la ce frecvențe acționează aceste componente

Frecvență



Source: (Lyons 2004)