Procesarea semnalelor

Frecvența. Domeniul Fourier.

Paul Irofti

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
Departmentul de Informatică
Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) \tag{2}$$

unde

- f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \ldots$
- t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- nt_s – orizontul de timp (s)
- $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- $2\pi f_0 n t$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)

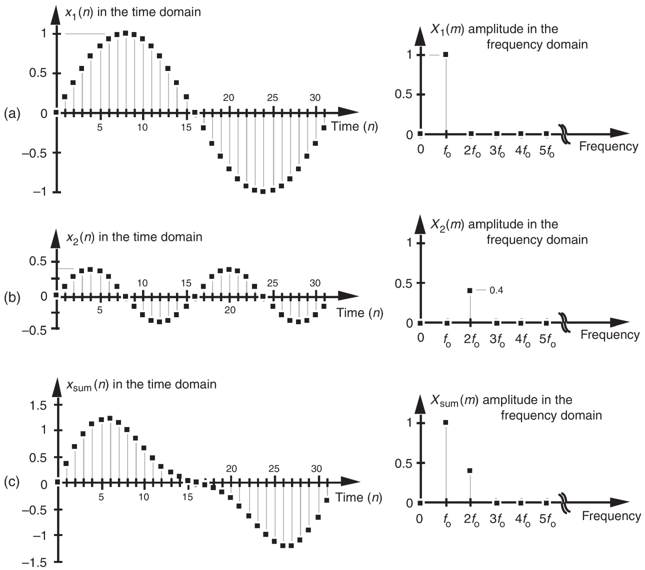
Frecvență

În analiza semnalelor suntem interesați adesea de frecvență.

Motivație:

- sinusoida are o singură componentă f_0 în frecvență, numită și **componentă spectrală**
- suma a două sinusoide de frecvență f_1, respectiv, f_2 are două componente spectrale f_1, f_2 în domeniul frecvenței
- suma a n sinusoide de frecvență $f_1, \ldots, f_n$ va avea n componente spectrale în domeniul frecvenței
- invers, putem analiza un semnal uitându-ne în frecvență și analizând din ce sinusoide este compus și la ce frecvențe acționează aceste componente

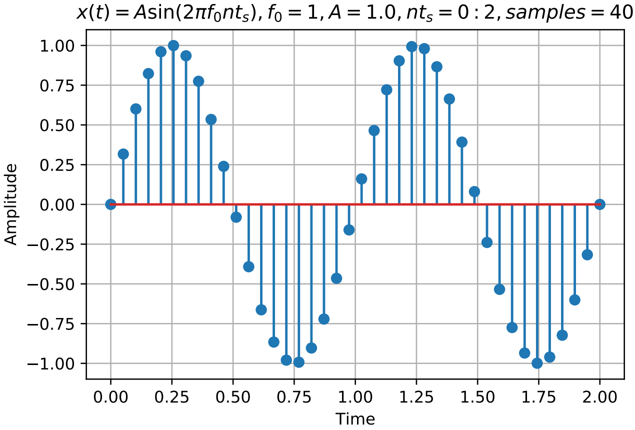
Frecvență



Source: (Lyons 2004)

Recuperarea frecvenței

Cum determin frecvența semnalului real f_0 în funcție de măsurători?



$$T = \frac{\text{eșantioane}}{\text{perioadă}} \times \underbrace{\frac{\text{timp}}{\text{eșantion}}}_{t_s} = 20 \times 0.05 = 1s \implies f_0 = 1Hz \quad (3)$$

Frecvența de eșantionare

Remarcă

Frecvența de eșantionare este inversul perioadei de eșantionare t_s

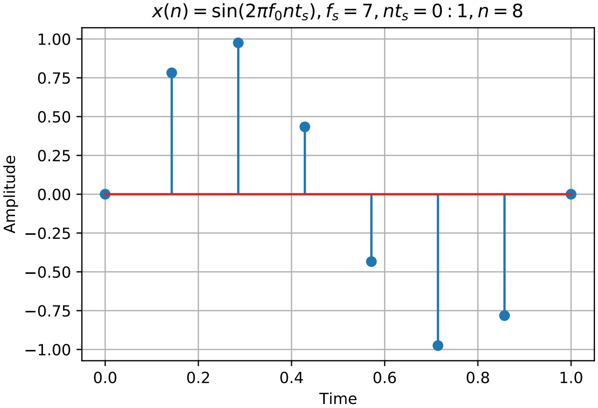
$$f_s = \frac{1}{t_s}, \tag{4}$$

iar ea afectează direct determinarea frecvenței absolute f_0*, frecvența semnalului real (original)*

Ce se întâmplă cu calculul frecvenței absolute f_0 dacă modific frecvența de eșationare f_s în (3)?

Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

$x(0) = 0.00$
$x(1) = 0.78$
$x(2) = 0.97$
$x(3) = 0.43$
$x(4) = -0.43$
$x(5) = -0.97$
$x(6) = -0.78$
$x(7) = -0.00$



Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

Ghici, ciupercă, ce-i?

$x(0) = 0.00$

$x(1) = 0.78$

$x(2) = 0.97$

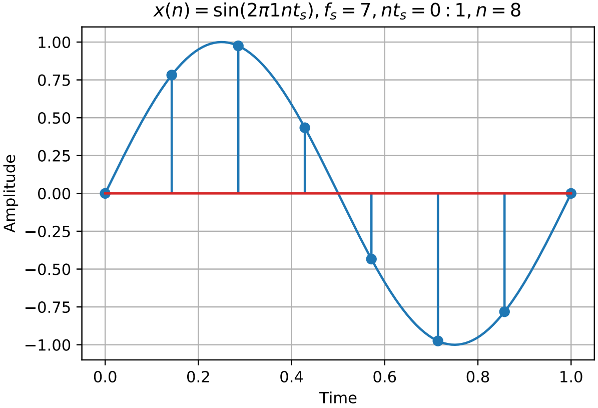
$x(3) = 0.43$

$x(4) = -0.43$

$x(5) = -0.97$

$x(6) = -0.78$

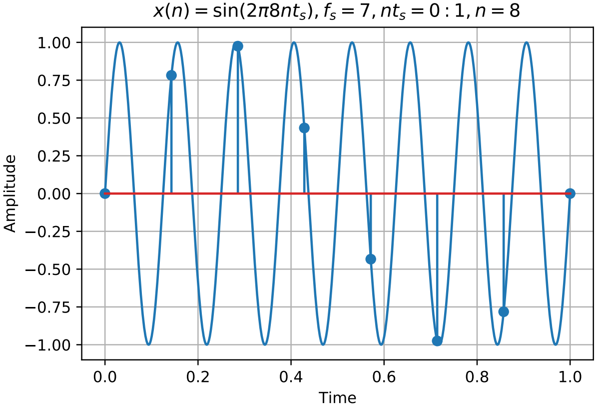
$x(7) = -0.00$



Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

Poate cineva cu mai multă imaginație ghicește:

$x(0) = 0.00$
$x(1) = 0.78$
$x(2) = 0.97$
$x(3) = 0.43$
$x(4) = -0.43$
$x(5) = -0.97$
$x(6) = -0.78$
$x(7) = -0.00$

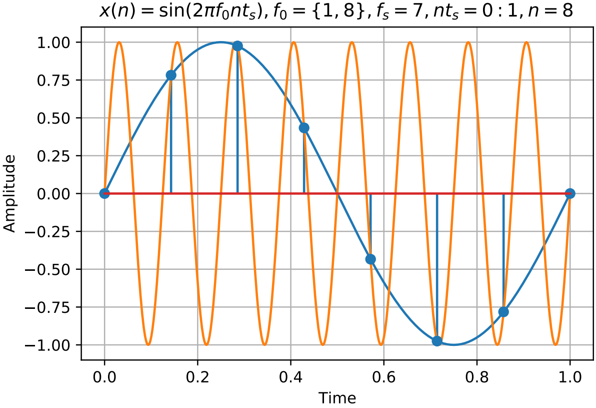


Este adevărat?

Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

Ambele soluții sunt adevărate: fenomenul de aliere (aliasing).

$x(0) = 0.00$
$x(1) = 0.78$
$x(2) = 0.97$
$x(3) = 0.43$
$x(4) = -0.43$
$x(5) = -0.97$
$x(6) = -0.78$
$x(7) = -0.00$



Există o infinitate de sinusoide care trec prin cele 8 puncte!

Aliasing

Fenomenul de aliere (aliasing) apare când:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi(f_0 + kf_s)nt_s) \tag{5}$$

Teoremă

Fie frecvența de eșantionare f_s (eșantioane / secundă) și k un număr întreg nenul. Atunci nu putem distinge eșantioanele unei sinusoide de frecvență $f_0 Hz$ de eșantioanele unei siunsoide de $f_0 + kf_s Hz$.

Cum putem fi siguri că ce am măsurat reprezintă realitatea?

Demonstrație aliasing

Fie semnalul $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ cu frecvența f_0 pe care îl eșantionăm cu o rată de f_s eșantioane pe secundă la perioade de timp constante $t_s = \frac{1}{f_s}$ $(0t_s, 1t_s, 2t_s, 3t_s, \dots)$:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \sin(2\pi 0 t_s) \\
x(1) &= \sin(2\pi 1 t_s) \\
x(2) &= \sin(2\pi 2 t_s) \\
x(3) &= \sin(2\pi 3 t_s) \\
&\vdots \\
x(n) &= \sin(2\pi n t_s)
\end{aligned} \tag{6}
$$

Astfel încât eșantionul $x(n)$ are valoarea sinusoide originale la momentul nt_s.

Demonstrație aliasing

Știm că $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi m)$ deci (6) devine:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi f_0 n t_s + 2\pi m) = \tag{7}$$

$$= \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{m}{n t_s}\right) n t_s\right) \tag{8}$$

Fie $m = kn$ a.î. putem înlocui fracția cu k

$$x(n) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{k}{t_s}\right) n t_s\right), \tag{9}$$

apoi folosind $f_s = \frac{1}{t_s}$ relația devine

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + k f_s\right) n t_s\right). \tag{10}$$

Exemplu: Frecvența de eșantionare $f_s = 7$

Aliasing: $f_0 = 1, f_s = 7, k = 1 \overset{(10)}{\Longrightarrow} f = f_0 + kf_s = 8$

$x(0) = 0.00$

$x(1) = 0.78$

$x(2) = 0.97$

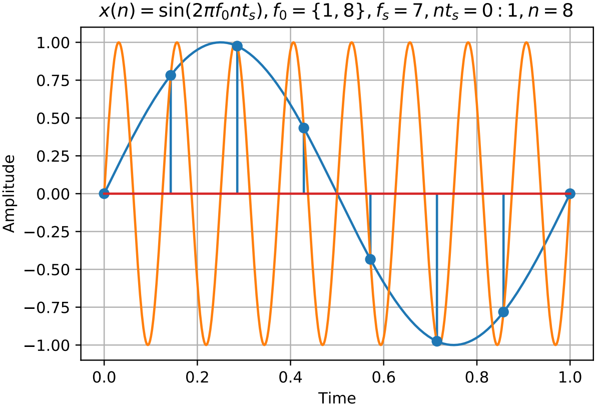
$x(3) = 0.43$

$x(4) = -0.43$

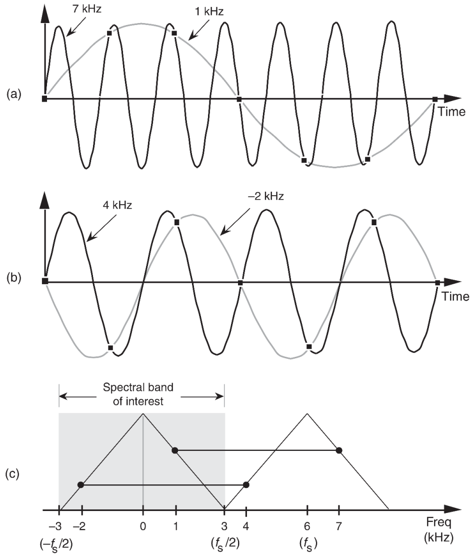
$x(5) = -0.97$

$x(6) = -0.78$

$x(7) = -0.00$

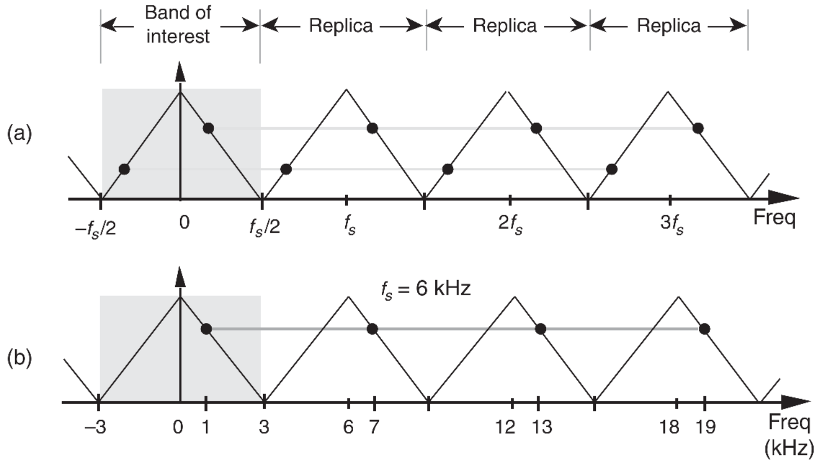


Ambiguitate în domeniul frecvenței



Source: (Lyons 2004)

Duplicare (replici) în domeniul frecvenței



Source: (Lyons 2004)

Semnalul $f_0 = 7kHz$ eșantionat cu $f_s = 6kHz$ produce o secvență a cărui spectru reprezintă simultan semnalele (tonurile): $1kHz, 7kHz, 13kHz, 19kHz, \ldots$.

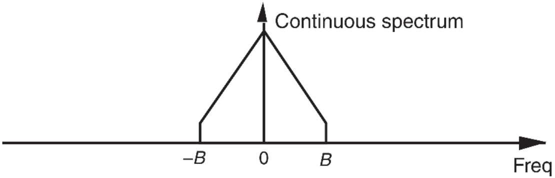
Semnale trece-jos (lowpass)

Definiție

Semnalele limitate în bandă sunt semnalele a căror amplitudine spectrală este nulă în afara intervalului $[-B Hz, +B Hz]$. Altfel spus, semnalul are o frecvență maximă.

Definiție

Un semnal trece-jos este un semal limitat în bandă și centrat în jurul frecvenței zero.

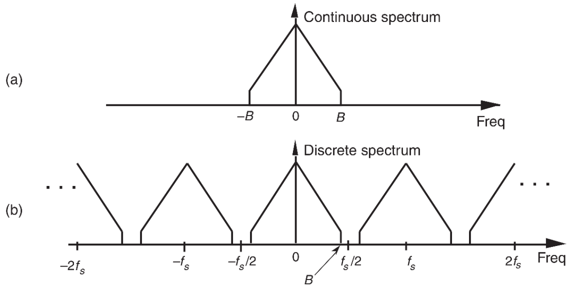


Source: (Lyons 2004)

Semnale trece-jos: de la analog la digital

Semnalul continuu este discretizat apărând duplicatele în spectrul fercvenței.

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + k f_s\right) n t_s\right).$$



Source: (Lyons 2004)

Se observă că $f_s \geq 2B$ a.î. duplicatele sunt separate la $\pm\frac{f_s}{2}$.

Semnale trece-jos (lowpass): frecvența Nyquist

Definiție

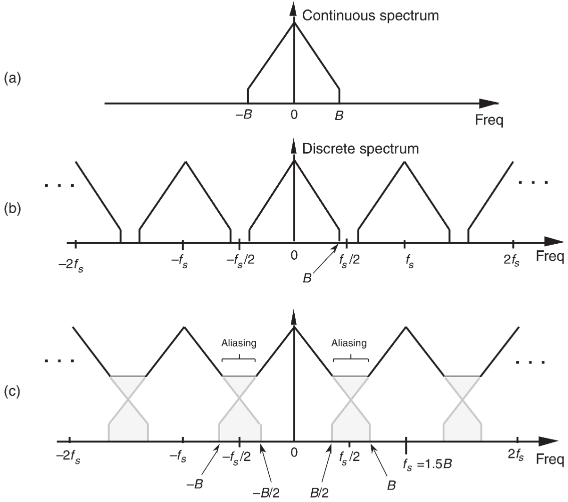
Frecvența de eșantionare $f_s \geq 2B$ *este criteriul Nyquist de eșantionare, rezultat din teorema Nyquist-Shannon, ce asigură separarea duplicatelor în domeniul frecvenței.*

Definiție

Frecvențele $\pm \frac{f_s}{2}$ *se numesc frecvențe de pliere (folding frequencies) sau frecvențe Nyquist.*

Ce se întâmplă când eșantionăm sub frecvența Nyquist?

Ce se întâmplă când eșantionăm sub frecvența Nyquist?



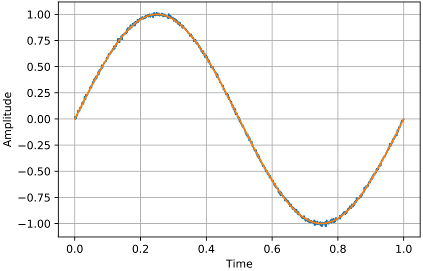
Source: (Lyons 2004)

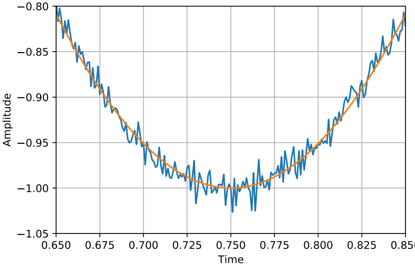
Semnale trece-jos (lowpass): observații

- informația în interavul $[-B, -\frac{B}{2}] \cup [\frac{B}{2}, B]$ este coruptă
- valorile amplitudinilor în cazul suprapunerii sunt nedefinite
- informația spectrală a semnalului original continuu este conținută complet în banda $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$
- ultima observație este foarte importantă în practică

Zgomot

Ce se întâmplă dacă semnalul continuu este însoțit de zgomot?

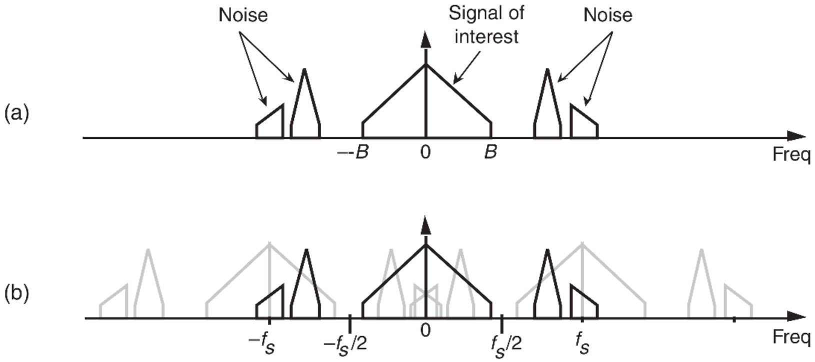




Semnale trece-jos (lowpass): zgomot

Pentru un semnal trece-jos eșantionat corect:

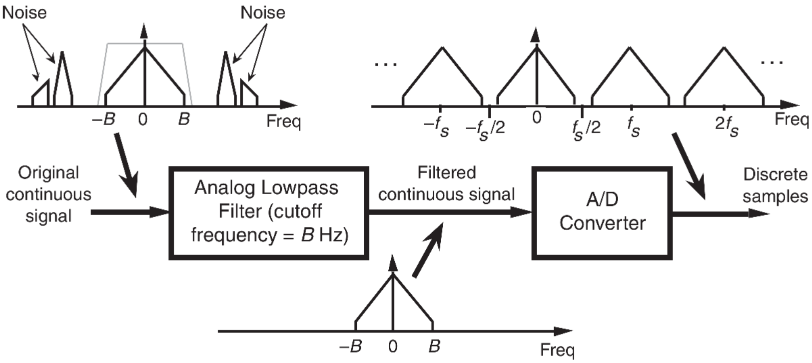
- nu avem suprapuneri are duplicatelor în banda B
- dar duplicate ale zgomotului sfârșesc și ele în banda de interes!



Source: (Lyons 2004)

Semnale trece-jos (lowpass): eliminarea zgomotului

Profităm de faptul că avem de a face cu semnal trece-jos și eliminăm cu un filtru trece-jos orice este în afara benzii BHz după care discretizăm.



Source: (Lyons 2004)

Cum trecem în frecvență și înapoi în timp?

Transformata Fourier și Transformata Fourier Inversă ne ajută să trecem din domeniul timpului în domeniul frecvenței și vice-versa.

Transformata Fourier

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N) \right] \end{aligned} \tag{11}$$

- $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \dots$)
- m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \dots, N-1$)
- $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \dots$)
- n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului
- N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

Transformata Fourier inversă

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$
\begin{aligned}
X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)\right]
\end{aligned}
$$

Definiție

Transformata Fourier inversă a unui semnal discret (IDFT):

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi nm/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left[cos(2\pi mn/N) + j \sin(2\pi mn/N)\right]
\end{aligned}
\tag{12}
$$